Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math.,
Bd. 4, S. 108—142 (1958)

THEORIE DER ENDLICHWERTIGEN ŁUKASIEWICZSCHEN PRÄDIKATENKALKÜLE DER ERSTEN STUFE[1])

Von HELMUT THIELE in Berlin

Promotion 18.7.1958

Berlin, Humb. U.
Nat. Diss.

R. UNIV

Mm 60

Einleitung

In dieser Arbeit werden endlichwertige Prädikatenkalküle mit einem ausgezeichneten und $n-1$ nicht-ausgezeichneten Wahrheitswerten ($n \geqq 2$, natürliche Zahl) untersucht, in denen stets die Łukasiewiczsche Implikation[2]) sowie die sogenannte prädikatenlogische Generalisierungs- und die Partikularisierungsfunktion[3]) vorkommen. Außerdem dürfen aussagenlogische Wahrheitsfunktionen, die gewisse Monotonieeigenschaften[4]) besitzen, beliebig aufgenommen werden. Wir benennen derartige Prädikatenkalküle nach Łukasiewicz, da sie im Hinblick auf die zugrunde gelegten Wahrheitswerte und die verwendete Implikation mit den Łukasiewiczschen Aussagenkalkülen[5]) übereinstimmen.

Das Ziel unserer Untersuchung ist es, die Theorie der Łukasiewiczschen Prädikatenkalküle systematisch zu entwickeln und die aus der Theorie der zweiwertigen Prädikatenkalküle bekannten Resultate auf Łukasiewiczsche Prädikatenkalküle zu übertragen. Im Mittelpunkt stehen dabei neben den Reduktionssätzen und dem Repräsentantenproblem besonders die Axiomatisierungstheoreme für die verschiedenen Arten der Allgemeingültigkeit sowie eine systematische Theorie des Bolzanoschen Folgerns. Auf Entscheidungsprobleme wird dagegen nicht eingegangen.

Die verwendeten Methoden entsprechen denen, die Skolem, Gödel, Wajsberg und Schröter in der Theorie zweiwertiger Prädikatenkalküle entwickelt haben.[6]) Es ist jedoch eine gewisse Modifikation notwendig, da wir nicht voraussetzen, daß Wahrheitsfunktionen aufgenommen werden (bzw. definierbar sind), deren Eigenschaften denen der zweiwertigen Negation verwandt sind. Dadurch können die in

---

[1]) Diss. Humbold-Universität Berlin, 1958. Referenten: Prof. Dr. Karl Schröter und Prof. Dr. Heinrich Grell. — Über die Resultate dieser Arbeit habe ich auf der Jahrestagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1955 in Göttingen berichtet.

[2]) Łukasiewicz-Tarski [11], § 3.

[3]) Siehe Seite 114 dieser Arbeit. Vgl. auch Asser [2], Seite 13 und Schröter [22], I, Seite 62.

[4]) Siehe Seite 113 dieser Arbeit.

[5]) Im Jahre 1920 hat J. Łukasiewicz zuerst einen dreiwertigen derartigen Aussagenkalkül angegeben. In Zusammenarbeit mit A. Tarski und anderen wurde dieser Ansatz später auf n Wahrheitswerte ($n \geqq 2$) verallgemeinert. E. L. Post entwickelte 1921 einen ähnlichen Grundgedanken. Łukasiewicz-Tarski [11]; Post [12]. — Vgl. auch Asser [1]; Rose [14] bis [16]; Rosser-Turquette [17] bis [20]; Schröter [23].

[6]) Skolem [27]; Gödel [5]; Wajsberg [30]; Schröter [22].

einem zweiwertigen Prädikatenkalkül, der die Negation enthält, üblichen Übergänge von Allgemeingültigkeit zu Erfüllbarkeit (und umgekehrt) im allgemeinen nicht mehr ausgeführt werden. Verwendet man aber an Stelle des Begriffs der erfüllenden Belegung bzw. des Modells den der falsifizierenden Belegung bzw. des F-Modells, so gelingt eine ähnliche Umformung, durch die wie im Zweiwertigen viele Sätze dem Verständnis und einem Beweis leichter zugänglich werden.

Der erste Paragraph enthält die Konstituierung der Semantik und der Syntax. Die semantischen Begriffsbildungen werden nach der üblichen Methode eingeführt.[1]) Der verwendete Ableitungsbegriff beruht auf den sieben Schlußregeln, die häufig bei der Behandlung eines zweiwertigen Prädikatenkalküls zugrunde gelegt werden.[2]) — Im zweiten Paragraphen beweisen wir zu Beginn einige elementare Theoreme, wie z. B. die Vererbung der verschiedenen Arten von Allgemeingültigkeit bei Anwendung unserer Schlußregeln, das Ersetzbarkeitstheorem für äquivalente Ausdrücke sowie die Bernayssche Einsetzungsregel. An den Beweis der Verschiebungssätze für die Quantifikatoren schließt sich die Herstellung von pränexen und Skolemschen (allgemeingültigkeitstheoretischen) Normalformen an. Hierbei ist wesentlich, daß gegenüber dem üblichen Verfahren nur mit der Implikation gearbeitet wird. Deshalb müssen einige Ableitungen neu gefaßt werden. — Der dritte Paragraph umfaßt die Reduktions- und Repräsentantentheoreme, die uns für alle betrachteten Arten von Allgemeingültigkeit einen vollständigen Überblick verschaffen. Der wichtige Satz von Löwenheim-Skolem[3]) wird ohne Verwendung des Axiomatisierungstheorems bewiesen. Dazu ändern wir den ursprünglichen Beweis von Skolem[4]) dem vorliegenden Ansatz entsprechend ab. — Im vierten Paragraphen wird zunächst der Gödelsche Vollständigkeitsbeweis[5]) auf unseren mehrwertigen Fall übertragen. Anschließend axiomatisieren wir die Menge der in einem k-zahligen Individuenbereich ($k \geqq 1$, natürliche Zahl) n-wertig allgemeingültigen Ausdrücke, indem wir das Wajsbergsche Axiomatisierungsverfahren[6]) geeignet modifizieren. — Der fünfte Paragraph enthält eine systematische Theorie des Bolzanoschen Folgerns, wie sie Schröter für zweiwertige Prädikatenkalküle entwickelt hat.[7]) Zunächst wird mit gewissen Sätzen, die eine Verallgemeinerung der Reduktionstheoreme aus dem dritten Paragraphen darstellen, eine Klassifikation aller betrachteten Bolzanoschen Folgerungsrelationen gegeben. Mit dem Haupttheorem über die syntaktische Charakterisierung der Bolzanoschen Folgerungsrelationen schließt die Arbeit.

Es soll noch besonders auf die grundlegenden Arbeiten von Rosser und Turquette über mehrwertige Logiken[8]) hingewiesen werden, denen der Verfasser bei

---

[1]) Vgl. z. B. Asser [2], Seite 6—8, 12—14; Schröter [22], I, Seite 64—68.
[2]) Schröter [22], I, Seite 68; vgl. auch Schröter [25].
[3]) Löwenheim [10]; Skolem [27], § 1.
[4]) Skolem [27], § 1.
[5]) Gödel [5].
[6]) Wajsberg [30].
[7]) Schröter [22].
[8]) Rosser-Turquette [17] bis [20].

der vorliegenden Untersuchung viele Anregungen entnehmen konnte. — Im Unterschied zum Ansatz der genannten Autoren fordern wir nicht, daß die sogenannten J-Funktionen[1]) aufgenommen werden bzw. definierbar sind. ROSSER und TURQUETTE lassen dagegen auch mehrere ausgezeichnete Wahrheitswerte sowie beliebige aussagenlogische Wahrheitsfunktionen zu; außerdem betrachten sie sehr allgemeine (eventuell sogar mehrstellige) Quantifikatoren. — Der Verfasser hat sich überlegt, daß fast alle in den Paragraphen 3 — 5 der vorliegenden Arbeit enthaltenen Sätze auf den folgenden Fall, der den Ansatz von ROSSER und TURQUETTE umfaßt, übertragen werden können: Es werden n Wahrheitswerte, m davon ausgezeichnet ($1 \leqq m \leqq n$, m und n natürliche Zahlen), beliebige aussagenlogische Wahrheitsfunktionen sowie beliebige Quantifikatoren im Sinne von ROSSER und TURQUETTE zugrunde gelegt. — Selbstverständlich können bei der Untersuchung dieser allgemeinen Prädikatenkalküle die Methoden aus der vorliegenden Arbeit nicht mehr verwendet werden. Dasselbe gilt für die von ROSSER und TURQUETTE entwickelten Verfahren. Vielmehr ist jetzt die von SCHRÖTER stammende Verallgemeinerung des GENTZENschen Sequenzenschließens[2]) auf mehrwertige Logiken von entscheidender Bedeutung. Durch diesen Gedanken ist es möglich, mit Hilfe der zugrunde gelegten Wahrheitsfunktionen und Quantifikatoren kanonisch einen Ableitungsbegriff zu konstruieren, der organisch mit dem betrachteten Kalkül und seiner Interpretation verbunden ist. Viele Beweise werden dadurch sehr durchsichtig, und auf irgendwelche Normalitätsforderungen (standard conditions) an die aufgenommenen Funktionen kann dabei ganz verzichtet werden. — Den Fall, daß $m = 1$ ist und die ŁUKASIEWICZsche Implikation in dem betrachteten Kalkül vorkommt bzw. definierbar ist (daneben dürfen wieder beliebige aussagenlogische Wahrheitsfunktionen und beliebige Quantifikatoren im Sinne von ROSSER und TURQUETTE aufgenommen werden), kann man auch mit anderen (spezielleren) Methoden untersuchen. Zunächst ist die Methode der Konstantenreduktion zu nennen, die zuerst SCHRÖTER in der Theorie der zweiwertigen Prädikatenkalküle angewendet hat.[3]) Sie läßt sich auf den vorliegenden Fall übertragen. Die Untersuchungen in dem betrachteten Kalkül werden dadurch auf Untersuchungen in einem aussagenlogisch funktional vollständigen ŁUKASIEWICZschen Prädikatenkalkül zurückgeführt. In dem betrachteten Fall läßt sich ferner auch die HENKINsche Beweismethode anwenden, und zwar in der vom Verfasser modifizierten Weise.[4]) Dabei werden wesentlich die von A. ROSE eingeführten V-Funktionen[5]) verwendet. Die genannten spezielleren J-Funktionen sind dagegen entbehrlich. — Die angedeuteten Resultate werden in einer Fortsetzung dieser Arbeit genauer begründet.

Bei der Beschäftigung mit mehrwertigen Logiken taucht das Problem auf, wie in einem Prädikatenkalkül das Gleichheitszeichen (falls es überhaupt als Grund-

---

[1]) Vgl. z. B. ROSSER-TURQUETTE [17], Seite 62—65 oder auch [20], Seite 17—22.
[2]) GENTZEN [4]; SCHRÖTER [23], Seite 245—251.
[3]) SCHRÖTER [26].
[4]) HENKIN [7]; THIELE [28].
[5]) ROSE [16].

zeichen vorkommt) bei einer beliebigen mehrwertigen Interpretation[1]) gedeutet werden muß. Diese Fragestellung scheint mindestens im Hinblick auf eine mehrwertige Interpretation der intuitionistischen und der modalen Prädikatenkalküle nicht abwegig zu sein. RASIOWA behandelt diese Frage im Rahmen einer mehrwertigen Interpretation gewisser Prädikatenkalküle, in deren Satzmenge, die zunächst syntaktisch definiert wird, die Sätze der sogenannten positiven Logik vorkommen.[2]) Für das Gleichheitszeichen werden dabei grundsätzlich der Satz der Identität: $a = a$ sowie das LEIBNIZsche Ersetzbarkeitstheorem: $a = b \to (H(a) \to H(^{a}/_{b}))$[3]) gefordert. Diesen Weg können wir auch im vorliegenden Fall einschlagen. Damit die angegebenen Axiome überhaupt allgemeingültig werden, müssen wir zur Interpretation des Gleichheitszeichens notwendig dasjenige zweistellige Attribut wählen, das (falls etwa in dem Individuenbereich J interpretiert wird) den geordneten Paaren $[x, x]$ den ausgezeichneten Wahrheitswert W und den restlichen der Form $[x, y]$ (also mit $x \neq y$) stets den („schlechtesten") nicht-ausgezeichneten Wahrheitswert F_{n-1} zuordnet ($x, y \in J$).[4]) Auf Grund dieser Tatsache liegt es nahe, das beschriebene Attribut als die Identität über J (in bezug auf die betrachtete Menge M^n von Wahrheitswerten) zu definieren. Diese Definition ist jedoch in verschiedener Hinsicht unbefriedigend. Zunächst stellt man die Frage, weshalb z. B. das LEIBNIZsche Ersetzbarkeitstheorem auch im mehrwertigen Fall gerade in der angegebenen Form gelten soll. Dem entspricht inhaltlich, daß nicht einzusehen ist, warum das zur Interpretation des Gleichheitszeichens dienende Attribut von den nicht-ausgezeichneten Wahrheitswerten stets nur F_{n-1}, also den schlechtesten, annehmen soll. Es wäre offenbar eine starke Einschränkung des mehrwertigen Standpunktes, wenn man nicht zulassen wollte, daß das Gleichheitszeichen z. B. durch das folgende Attribut α interpretiert wird: α ordnet $[x, x]$ stets W und $[x, y]$ mit $x \neq y$ stets einen der Wahrheitswerte F_1, F_3 zu (dabei ist natürlich vorauszusetzen, daß $n \geqq 4$; ferner $x, y \in J$). Auf Grund dieser Bemerkung neigen wir zu der Ansicht, daß es in mehrwertigen Logiken nicht sinnvoll und unter Umständen auch gar nicht möglich ist, über einen Individuenbereich J genau ein zweistelliges (mehrwertiges)

[1]) Etwa im Sinne von ASSER [2].

[2]) RASIOWA [13].

[3]) Durch „$H(^{a}/_{b})$" deuten wir einen Ausdruck an, der aus $H(a)$ dadurch entsteht, daß die in $H(a)$ vollfrei vorkommende Individuenvariable a an beliebigen Stellen, an denen sie in $H(a)$ vorkommt, durch die Individuenvariable b ersetzt wird und dabei keine Variablenkonfusion auftritt, d. h. daß b beim Einsetzen nicht gebunden wird. (Zum Begriff der Variablenkonfusion vgl. man z. B. ASSER [2], Seite 8.)

[4]) Für $n = 2$ ist der betrachtete Kalkül bekanntlich semantisch vollständig. Dies trifft jedoch für $n > 2$ nicht mehr zu. Es fehlen noch Axiome, die besagen, daß das zur Interpretation des Gleichheitszeichens dienende Attribut höchstens die Wahrheitswerte W und F_{n-1} annimmt. — Kommt in dem betrachteten Kalkül die ŁUKASIEWICZsche Negation N^n (Funktor etwa: $\sim$) vor, so kann man als zusätzliches Axiom z. B. den Ausdruck $(a = b \to \sim a = b) \to \sim a = b$ wählen. (N^n wird durch die folgenden Bedingungen definiert: $N^n(W) = F_{n-1}$; $N^n(F_{n-1}) = W$; $N^n(F_\nu) = F_{n-1-\nu}$, wobei $1 \leqq \nu \leqq n - 2$.) — Auch wenn die Funktion N^n nicht vorkommt und damit das obige Axiom nicht formulierbar ist, kann man erreichen, daß der betrachtete Kalkül semantisch vollständig wird. Hierauf soll jedoch in dieser Arbeit nicht näher eingegangen werden.

Attribut auszuzeichnen, das dann stets zur Interpretation des Gleichheitszeichens dient und die Identität über J in bezug auf die zugrunde gelegte mehrwertige Logik genannt wird. Diese Ansicht wird noch verstärkt, wenn man versucht, die oben angedeutete Definition auf den allgemeinen Fall einer beliebig zugrunde gelegten Menge M von Wahrheitswerten zu übertragen. Man müßte dann die (mehrwertige) Identität über J bezüglich M als dasjenige Attribut definieren, das $[x, x]$ stets den ausgezeichneten und $[x, y]$ mit $x \neq y$ stets den schlechtesten nicht-ausgezeichneten Wahrheitswert aus M zuordnet $(x, y \in J)$. Man sieht aber sofort, daß diese Definition im allgemeinen sinnlos ist, da es in einer beliebigen Menge M von Wahrheitswerten nicht immer genau einen ausgezeichneten und genau einen schlechtesten nicht-ausgezeichneten Wahrheitswert zu geben braucht. Wir schlagen deshalb allgemein (für beliebiges M) die folgende Definition vor: Eine zweistellige eindeutige Abbildung α von J in M ist eine Identität über J bezüglich M genau dann, wenn α allen geordneten Paaren $[x, x]$ (beliebige) ausgezeichnete und den geordneten Paaren $[x, y]$ mit $x \neq y$ (beliebige) nicht-ausgezeichnete Wahrheitswerte aus M zuordnet $(x, y \in J)$.[1])

Im zweiwertigen Fall wird dadurch genau ein Attribut, nämlich die übliche zweiwertige Identität, charakterisiert, also widerspricht der vorstehende allgemeine Ansatz nicht den üblichen Auffassungen in der zweiwertigen Prädikatenlogik. Bei beliebigen J und M wird durch unsere Definition zwar nicht ein einzelnes, jedoch eine wohlbestimmte Klasse von zweistelligen Attributen (bezüglich M) festgelegt. Bei der Interpretation der Ausdrücke in J bezüglich M wird dann im Normalfall das Gleichheitszeichen als Variable bezüglich der definierten Klasse von Attributen angesehen. Dadurch können für einen Prädikatenkalkül mit Gleichheitszeichen auch bei mehrwertigen Interpretationen in einem wohlbestimmten Sinne die üblichen semantischen Begriffsbildungen (Allgemeingültigkeit, Erfüllbarkeit, Modell usw.) eingeführt und die damit zusammenhängenden Probleme untersucht werden. Bei einem konkret vorgegebenen J und M kann es außerdem möglich sein, aus der Klasse aller Identitäten (über J bezüglich M) gewisse spezielle Teilklassen (die eventuell genau eine Identität enthalten) auszuzeichnen. Bei der Interpretation kann dann das Gleichheitszeichen als Variable bezüglich einer solchen Teilklasse angesehen werden.[2]) Man erhält auf diese Weise modifizierte semantische Begriffsbildungen, und es entsteht die Aufgabe, alle in diesem Sinne möglichen Fälle zu diskutieren und sie gegeneinander abzugrenzen. So kann man z. B. bei den hier zugrunde gelegten n-wertigen Łukasiewiczschen Logiken die Klasse aller Identitäten über einem Individuenbereich J betrachten, die höchstens die Wahrheitswerte: $W, F_{\nu_1}, F_{\nu_2}, \ldots, F_{\nu_k}$ $(1 \leqq \nu_\varkappa \leqq n-1,\ 1 \leqq \varkappa \leqq k)$ annehmen. Es ist klar,

[1]) Vgl. Rasiowa [13], Seite 298.

[2]) Wir weisen darauf hin, daß unser Ansatz, formal gesehen, gewisse Ähnlichkeiten mit der Interpretation der sogenannten Auswahloperatoren in der (üblichen zweiwertigen) Prädikatenlogik bzw. Arithmetik besitzt. Während das Hilbertsche ε-Symbol im Rahmen der Prädikatenlogik als Variable bezüglich einer gewissen Klasse von Auswahlfunktionen (erster, zweiter bzw. dritter Art) interpretiert wird, deutet man das μ-Symbol in der Arithmetik stets als eine bestimmte Auswahlfunktion, nämlich als den beschränkten (oder den unbeschränkten) Minimumoperator. Man vgl. dazu Asser [3], Hilbert-Bernays [9], Schröter [24].

daß die zu Beginn besprochene Interpretation des Gleichheitszeichens unter diesen verallgemeinerten Ansatz fällt (für $k = 1$, $\nu_1 = n - 1$). — Die angedeuteten Untersuchungen werden ebenfalls in einer weiteren Arbeit genauer dargestellt.

Im folgenden deuten wir beliebige Kardinalzahlen durch „$\mathfrak{m}$“, „$\mathfrak{m}_1$“, „$\mathfrak{m}_2$“ und beliebige natürliche Zahlen durch „i“, „j“, „k“, „l“, „m“, „n“, „r“, „s“, „t“ (eventuell mit Indizes) an.

Herrn Prof. Dr. Karl Schröter habe ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für seine wertvollen Ratschläge bei ihrer Abfassung sehr zu danken.

§ 1. Konstituierung

Wir gehen von einer beliebigen festen n-zahligen Menge M^n aus ($n \geqq 2$, natürliche Zahl), deren Elemente wir im folgenden *Wahrheitswerte* nennen. Wir zeichnen genau ein Element dieser Menge aus und nennen es den *ausgezeichneten Wahrheitswert* (angedeutet durch „W“). Die anderen heißen *nicht-ausgezeichnete Wahrheitswerte* (angedeutet durch „F_1“, ..., „F_{n-1}“). Als Variable für Wahrheitswerte verwenden wir „w“ (eventuell mit Indizes). Die eingeführten Wahrheitswerte denken wir uns in der Reihenfolge $W, F_1, \ldots, F_{n-1}$ nach der „*Größe ihres Wahrheitsgehalts*“ totalgeordnet. Wir sagen, daß w_1 *besser als* w_2 ist ($w_1 > w_2$) genau dann, wenn in der obigen Anordnung w_1 links von w_2 steht. Damit gleichbedeutend sagen wir, daß w_2 *schlechter als* w_1 ist ($w_2 < w_1$). Ist außerdem $w_1 = w_2$ zugelassen, so schreiben wir dafür $w_1 \geqq w_2$ bzw. $w_2 \leqq w_1$.

Wir betrachten ferner eine gewisse Menge Ω von eindeutigen endlichstelligen Abbildungen von M^n in M^n, die wir *aussagenlogische Wahrheitsfunktionen* nennen und durch „Φ_k^i“ bezeichnen ($0 \leqq i$, $1 \leqq k \leqq n^{n^i}$, i Stellenzahl, k Unterscheidungsindex). Als 0-stellige Wahrheitsfunktionen definieren wir sinngemäß die n Wahrheitswerte $W, F_1, \ldots, F_{n-1}$ selbst. Die Menge Ω ist nicht beliebig, sondern erfüllt zwei Bedingungen. Zunächst soll sie stets die durch die nachstehende Tabelle charakterisierte zweistellige Funktion, die wir die n-wertige Łukasiewiczsche *Implikation* nennen und gesondert durch „C^n“ bezeichnen, enthalten.

C^n	W	F_1	F_2	. . .	F_{n-2}	F_{n-1}
W	W	F_1	F_2	. . .	F_{n-2}	F_{n-1}
F_1	W	W	F_1	. . .	F_{n-3}	F_{n-2}
F_2	W	W	W	. . .	F_{n-4}	F_{n-3}
. . .	.	.	.	. . .	.	.
F_{n-2}	W	W	W	. . .	W	F_1
F_{n-1}	W	W	W	. . .	W	W

Als zweites fordern wir, daß alle außer C^n in Ω noch enthaltenen Funktionen[1]) *monoton* sind im folgenden Sinne: (1) Alle 0-stelligen Funktionen sind monoton. (2) Wenn $i \geqq 1$ ist, dann gilt für jede Stelle ι ($1 \leqq \iota \leqq i$) mindestens eine der beiden

[1]) C^n ist ebenfalls monoton.

Bedingungen: a) Für jedes $w_1, \ldots, w_\iota, w'_\iota, \ldots, w_i$ aus M^n: Wenn $w_\iota \leqq w'_\iota$, so $\Phi^i_k(w_1, \ldots, w_\iota, \ldots, w_i) \leqq \Phi^i_k(w_1, \ldots, w'_\iota, \ldots, w_i)$ (Φ^i_k ist im ι-ten Argument monoton wachsend); b) Für jedes $w_1, \ldots, w_\iota, w'_\iota, \ldots, w_i$ aus M^n: Wenn $w_\iota \leqq w'_\iota$, so $\Phi^i_k(w_1, \ldots, w_\iota, \ldots, w_i) \geqq \Phi^i_k(w_1, \ldots, w'_\iota, \ldots, w_i)$ (Φ^i_k ist im ι-ten Argument monoton fallend).[1])

Wir betrachten schließlich noch *prädikatenlogische Wahrheitsfunktionen*; das sind eindeutige Abbildungen, die jeder nicht-leeren Teilmenge N von M^n einen Wahrheitswert w aus M^n zuordnen. Wir nehmen in unseren Aufbau zwei derartige Funktionen auf, nämlich die n-wertige *Generalisierungsfunktion* Om^n und die n-wertige *Partikularisierungsfunktion* Ex^n, die jeder nicht-leeren Teilmenge N von M^n den schlechtesten bzw. besten Wahrheitswert aus N zuordnen.

Bemerkung. Es ist bekannt, daß für das Folgende die Natur der Elemente aus M^n nicht wesentlich ist. Um z. B. die Allgemeingültigkeit eindeutig charakterisieren zu können, ist es hinreichend, die algebraische Struktur der Menge M^n bezüglich der eingeführten Funktionen bis auf Isomorphie festzulegen (wobei erwähnt werden soll, daß diese Isomorphiebedingung keineswegs notwendig ist). Aus diesem Grunde benutzen manche Autoren allein natürliche oder rationale Zahlen als Wahrheitswerte.[2])

Der beschriebene inhaltliche Ansatz wird nun wie üblich in der Form eines *Kalküls* dargestellt. — Als *Grundzeichen* verwenden wir:

(1) die *Individuenvariablen* a_j ($j \geqq 0$, natürliche Zahl);

(2) die *Prädikatenvariablen* A^i_k ($i \geqq 1$, $k \geqq 0$, natürliche Zahlen);[3])

(3) für jede Funktion aus Ω genau einen (sogenannten *aussagenlogischen*) *Funktor*, und zwar für die stets in Ω vorkommende Funktion C^n den Funktor $\to$ und für die außerdem in Ω eventuell vorkommenden Wahrheitsfunktionen Φ^i_k jeweils F^i_k;

(4) die *prädikatenlogischen Funktoren* (*Quantifikatoren*) $\forall$ und $\exists$ für die Generalisierungsfunktion Om^n bzw. für die Partikularisierungsfunktion Ex^n;

(5) die *Klammern* (,) als technische Zeichen.

Aus der Gesamtheit aller endlichen (linearen) *Zeichenreihen* Z, die aus den oben angegebenen Grundzeichen gebildet werden können, sondern wir auf Grund der folgenden Bedingungen induktiv *Ausdrücke* aus:

(1) Alle Zeichenreihen der Form $A^i_k\, a_{j_1} \ldots a_{j_t}$ sind Ausdrücke. — Diese heißen *prädikative Ausdrücke*.

---

[1]) Damit die einzuführenden Ausdrucksbestimmungen und Axiomensysteme „übersehbar", d. h. entscheidbar sind, muß man fordern, daß die Menge Ω selbst entscheidbar ist. Dies kann so präzisiert werden, daß bei einer (rekursiven) Arithmetisierung aller aussagenlogischen Wahrheitsfunktionen in M^n die Menge der GÖDELschen Zahlen der Funktionen aus Ω rekursiv sein soll. In dieser Arbeit spielt jedoch eine solche Voraussetzung keine wesentliche Rolle. Man vgl. dazu Seite 129 und 141.

[2]) Vgl. ŁUKASIEWICZ-TARSKI [11] und z. B. ROSSER-TURQUETTE [20].

[3]) Die Menge der Individuenvariablen und die der Prädikatenvariablen werden damit als abzählbar unendlich vorausgesetzt. Verallgemeinerungen auf höhere Mächtigkeiten übertragen sich wie im zweiwertigen Prädikatenkalkül.

(2) a) Sind Z_1, Z_2 Ausdrücke, so ist auch $(Z_1 \to Z_2)$ ein Ausdruck.
b) Alle F_k^0 sind Ausdrücke.
c) Ist $i \geqq 1$ und sind $Z_1, \ldots, Z_i$ Ausdrücke, so ist auch $F_k^i Z_1 \ldots Z_i$ ein Ausdruck.
d) Ist Z ein Ausdruck, in dem a_j, aber weder $\forall a_j$ noch $\exists a_j$ vorkommen, so sind auch $\forall a_j Z$ und $\exists a_j Z$ Ausdrücke.

(3) Z ist nur dann ein Ausdruck, wenn dies auf Grund von (1) oder (2) der Fall ist.[1])

Beliebige Ausdrücke deuten wir durch „H", beliebige Mengen von Ausdrücken durch „X", „Y" an (sämtlich eventuell mit Indizes). — Bei der Angabe spezieller Ausdrücke machen wir von folgenden Klammerersparungen Gebrauch: (1) Ein beidseitig mit k Punkten versehener Pfeil trennt stärker als jeder mit weniger Punkten versehene. (2) Im fertigen Ausdruck dürfen die Außenklammern (sofern vorhanden) fortgelassen werden.

Wir kommen nun zur *Interpretation* der Ausdrücke. Durch „J" bezeichnen wir im folgenden stets einen nicht-leeren Individuenbereich. Unter einem *n-wertigen i-stelligen Attribut α über J* verstehen wir eine Abbildung, die jedem i-Tupel von Individuen aus J eindeutig einen Wahrheitswert w aus M^n zuordnet. Für die Interpretation der Ausdrücke ist nun im vorliegenden Fall die folgende Redeweise grundlegend:

Der Ausdruck H nimmt bei der Belegung f_1 der Individuenvariablen mit Individuen aus J und der Belegung f_2 der Prädikatenvariablen mit n-wertigen Attributen über J den Wahrheitswert w an $\left(w = Wert_J^n(H; f_1, f_2)\right)$.

Hierbei sind f_1, f_2 eindeutige Funktionen, die jeder Individuenvariablen a_j ein Element aus J bzw. jeder Prädikatenvariablen A_k^i ein n-wertiges i-stelliges Attribut über J zuordnen. — Es handelt sich also bei der obigen Redeweise um die Definition einer eindeutigen Funktion der drei Veränderlichen H, f_1, f_2, die außerdem noch von den Parametern n und J abhängt und deren Funktionswerte in der Menge M^n der Wahrheitswerte angenommen werden. Wir nennen sie deshalb *Wertfunktion*. Sie wird durch die nachstehenden Bedingungen induktiv definiert:

(1) $Wert_J^n(A_k^i a_{j_1} \ldots a_{j_i}; f_1, f_2) = f_2(A_k^i)[f_1(a_{j_1}), \ldots, f_1(a_{j_i})]$.

(2) a) $Wert_J^n(H_1 \to H_2; f_1, f_2) = C^n\left(Wert_J^n(H_1; f_1, f_2), Wert_J^n(H_2; f_1, f_2)\right)$.
b) $Wert_J^n(F_k^0; f_1, f_2) = \Phi_k^0$.
c) $Wert_J^n(F_k^i H_1 \ldots H_i; f_1, f_2) = \Phi_k^i\left(Wert_J^n(H_1; f_1, f_2), \ldots, Wert_J^n(H_i; f_1, f_2)\right)$
d) $Wert_J^n(\forall a_j H; f_1, f_2) = Om_n\{Wert_J^n(H; f_1', f_2)\}_{f_1' =_{(a_j)} f_1}$. $(i \geqq 1)$.
e) $Wert_J^n(\exists a_j H; f_1, f_2) = Ex_n\{Wert_J^n(H; f_1', f_2)\}_{f_1' =_{(a_j)} f_1}$.

Hierbei soll „$\{Wert_J^n(H; f_1', f_2)\}_{f_1' =_{(a_j)} f_1}$" diejenige Menge von Wahrheitswerten andeuten, die man erhält, wenn bei festem n, J, H, f_1, f_2 das f_1' die Gesamtheit der

[1]) Auf Grund dieser Definition ist es möglich, viele Beweise durch Induktion über die sogenannte *Ausdrucksstufe* zu führen.

Belegungen durchläuft, die sich höchstens an der Stelle a_j im Funktionswert von f_1 unterscheiden.[1])

Mit Hilfe der Wertfunktion können wir die *semantischen Begriffe* definieren, die für das Folgende von grundlegender Bedeutung sind. Wir sagen:

(1) *H ist n-wertig allgemeingültig in J* ($ag^n_J H$) *genau dann, wenn für jedes f_1, f_2 gilt:* $Wert^n_J(H; f_1, f_2) = W$.

(2) *H ist n-wertig allgemeingültig im $\mathfrak{m}$-zahligen* ($ag^n_{\mathfrak{m}} H$) *genau dann, wenn H in jedem Individuenbereich J mit der Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ n-wertig allgemeingültig ist* ($\mathfrak{m} \geqq 1$).

(3) *H ist n-wertig allgemeingültig* ($ag^n H$) *genau dann, wenn H in jedem (nicht-leeren) Individuenbereich J n-wertig allgemeingültig ist.*

(4) *H ist n-wertig allgemeingültig im Endlichen* ($ag^n_{end} H$) *genau dann, wenn H in jedem (nicht-leeren) endlichen Individuenbereich n-wertig allgemeingültig ist.*

(5) $[f_1, f_2]$ *ist ein n-wertiges Modell von X in J genau dann, wenn für jedes $H \in X$ gilt:* $Wert^n_J(H; f_1, f_2) = W$.

(6) $[f_1, f_2]$ *ist ein n-wertiges F-Modell von X in J genau dann, wenn für jedes $H \in X$ gilt:* $Wert^n_J(H; f_1, f_2) \prec W$.

Die Mengen der Ausdrücke H, die jeweils in einer der angegebenen Arten allgemeingültig sind, bezeichnen wir der Reihe nach durch „ag^n_J“, „$ag^n_{\mathfrak{m}}$“, „ag^n“ bzw. „ag^n_{end}“.

Die nun folgenden Definitionen stellen einen gewissen Zusammenhang mit dem zugehörigen n-wertigen Łukasiewiczschen Aussagenkalkül her, der beim Beweis des Vollständigkeitssatzes (4.1) sowie des Endlichkeitssatzes für das Bolzanosche Folgern (5.7) von Bedeutung sein wird. — Ein Ausdruck H heißt *aussagenlogisch einfach*, wenn er von der Form $A^i_k a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_i}$ ist oder mit $\forall$ oder $\exists$ beginnt. In Analogie zu den prädikatenlogischen Definitionen ist jetzt die folgende Redeweise grundlegend:

Der Ausdruck H nimmt bei der Belegung f der aussagenlogisch einfachen Ausdrücke mit Wahrheitswerten aus M^n den Wahrheitswert w an ($w = Werta(H; f)$).

Hierbei ist f eine eindeutige Funktion, die jedem aussagenlogisch einfachen Ausdruck einen Wahrheitswert aus M^n zuordnet. Da sich nun offensichtlich jeder Ausdruck H eindeutig aus aussagenlogisch einfachen Ausdrücken mit Hilfe der Funktoren $\to$ und F^i_k aufbauen läßt, ist die folgende induktive Definition der obigen Redeweise korrekt:

(1) $Werta^n(H; f) = f(H)$ für aussagenlogisch einfache Ausdrücke H.

(2) a) $Werta^n(H_1 \to H_2; f) = C^n\big(Werta^n(H_1; f), Werta^n(H_2; f)\big)$.

b) $Werta^n(F^0_k; f) = \Phi^0_k$.

c) $Werta^n(F^i_k H_1 \ldots H_i; f) = \Phi^i_k\big(Werta^n(H_1; f), \ldots, Werta^n(H_i; f)\big)$.

---

[1]) Vgl. dazu Asser [2], Seite 6—17 und Schröter [22], I, Seite 64—66. — Der Begriff der Wertfunktion ist verwandt mit dem des (J, A)-*Funktionals* von Mostowski. Vgl. dazu Rasiowa [13], Seite 297.

Mit Hilfe dieser Begriffsbildung definiert man schließlich:

(1) *H ist n-wertig aussagenlogisch allgemeingültig* ($aga^n H$) *genau dann, wenn für jedes f gilt*: $Werta^n(H; f) = W$.

(2) *f ist ein n-wertiges aussagenlogisches F-Modell von X genau dann, wenn für jedes* $H \in X$ *gilt*: $Werta^n(H; f) \prec W$.

Die Menge der Ausdrücke H, die n-wertig aussagenlogisch allgemeingültig sind, deuten wir durch „aga^n“ an.

Neben den genannten Begriffen ist der *Begriff der Ableitbarkeit* von grundlegender Bedeutung. Der verwendete Ableitungsbegriff wird wie üblich induktiv mit Hilfe von *Schlußregeln* definiert, wobei die hier verwendeten mit den bekannten sieben Regeln[1]) übereinstimmen, die in zweiwertigen Prädikatenkalkülen häufig dem Ableitungsbegriff zugrunde gelegt werden. Wir erklären somit die Redeweise: *Aus X ist H ableitbar* ($X\,Abl\,H$) folgendermaßen induktiv:

(1) Wenn $H \in X$, so $X\,Abl\,H$.

(2) a) Abtrennungsregel (*Abtr*).
Wenn $X\,Abl\,H_1$ und $X\,Abl\,H_1 \rightarrow H_2$, so $X\,Abl\,H_2$.

b) Regel der vorderen Generalisierung (*Gv*).
Wenn $X\,Abl\,H_1(a_j) \rightarrow H_2$, so $X\,Abl\,\forall a_j H_1(a_j) \rightarrow H_1$.[2])

c) Regel der hinteren Generalisierung (*Gh*).
Wenn $X\,Abl\,H_1 \rightarrow H_2(a_j)$ und a_j nicht in H_1 vorkommt, so $X\,Abl\,H_1 \rightarrow \forall a_j H_2(a_j)$.

d) Regel der vorderen Partikularisierung (*Pv*).
Wenn $X\,Abl\,H_1(a_j) \rightarrow H_2$ und a_j nicht in H_2 vorkommt, so $X\,Abl\,\exists a_j H_1(a_j) \rightarrow H_2$.

e) Regel der hinteren Partikularisierung (*Ph*).
Wenn $X\,Abl\,H_1 \rightarrow H_2(a_j)$, so $X\,Abl\,H_1 \rightarrow \exists a_j H_2(a_j)$.

f) Regel der gebundenen Umbenennung (*Umgbd*).[3])
Wenn $X\,Abl\,H_1$ und H_1 durch eine gebundene Umbenennung unter Vermeidung von Variablenkollision und -konfusion in H_2 übergeht, so $X\,Abl\,H_2$.

g) Regel der speziellen vollfreien Umbenennung (*Umsvfr*).
Wenn $X\,Abl\,H(a_i, a_j)$, so $X\,Abl\,H(^{a_i}/_{a_j}, a_j)$.[4])

(3) $X\,Abl\,H$ nur dann, wenn dies auf Grund von (1) oder (2) der Fall ist.[5])

Die Menge aller Ausdrücke H, die aus X ableitbar sind, nennen wie *die Ableitungsmenge von X* und deuten sie durch „$Ab(X)$“ an.

---

[1]) Vgl. z. B. Schröter [22], I, Seite 68.

[2]) Durch „$H(a_j)$“ deuten wir wie üblich an, daß die Individuenvariable a_j *vollfrei* in H vorkommt, d. h., daß a_j, aber weder $\forall a_j$ noch $\exists a_j$ in H vorkommen.

[3]) Zur genauen Formulierung dieser Schlußregel vgl. man z. B. Asser [2], Seite 8—9 und Schröter [22], I, Seite 68—69.

[4]) Durch „$H(^{a_i}/_{a_j}, a_j)$“ deuten wir den Ausdruck an, der aus $H(a_i, a_j)$ dadurch entsteht, daß an allen Stellen, an denen a_i in $H(a_i, a_j)$ vorkommt, a_j eingesetzt wird.

[5]) Wir weisen darauf hin, daß auf Grund der vorstehenden Definition von $X\,Abl\,H$ viele Beweise über die sogenannte *Stufe der Ableitbarkeit* geführt werden können.

§ 2. Elementare semantische und syntaktische Theoreme

Wir beginnen mit zwei Sätzen, aus denen wir später (§ 4) unmittelbar auf die semantische Widerspruchsfreiheit der betrachteten Prädikatenkalküle schließen können. Sie spielen allerdings schon in diesem Paragraphen eine wichtige Rolle, z. B. beim Beweis der Sätze 2.10 und 2.11.

2.1. *Wenn* $aga^n H$, *so* $ag_J^n H$.

2.2. *Wenn* $X \subseteqq ag_J^n$, *so* $Ab(X) \subseteqq ag_J^n$.

Beweise. Der Beweis von 2.1 wird wie im Zweiwertigen geführt. Ist H *quantifikatorenfrei*, gilt auch die Umkehrung dieses Satzes. — 2.2. Wir formulieren zunächst drei Lemmata. Dazu sei N eine nicht-leere Teilmenge von M^n; außerdem bezeichne „$C^n(N, w)$" bzw. „$C^n(w, N)$" die Menge aller Elemente der Form $C^n(w_1, w)$ bzw. $C^n(w, w_1)$, wobei $w_1 \in N$, $w \in M^n$, w fest.

Lemma 1. *Wenn* $w_1 \leqq w_2$, *so* $C^n(w_1, w) \geqq C^n(w_2, w)$ *und* $C^n(w, w_1) \leqq C^n(w, w_2)$.

Lemma 2. a) $C^n(Ex^n N, w) = Om^n C^n(N, w)$. b) $C^n(w, Om^n N) = Om^n C^n(w, N)$.

Lemma 3. *Unterscheiden sich die Belegungen* f_1, f_1' *der Individuenvariablen mit Individuen aus* J *höchstens an der Stelle* a_j *und kommt* a_j *nicht frei*[1]) *in* H *vor, so gilt*: $Wert_J^n(H; f_1, f_2) = Wert_J^n(H; f_1', f_2)$.

Auf Grund der angegebenen Definitionen sind Lemma 1 und 2 klar. Lemma 3 wird induktiv über die Ausdrucksstufe von H bewiesen.

Mit Hilfe von Lemma 1 bis 3 zeigt man nun leicht, daß sich die Allgemeingültigkeit in J bei Anwendung der eingeführten Schlußregeln vererbt, und daraus folgt durch Induktion über die Stufe der Ableitbarkeit sofort Satz 2.2.

Der nachstehende Satz, der wieder sehr einfach induktiv über die Ableitbarkeitsstufe zu beweisen ist, bringt einige grundlegende Eigenschaften der eingeführten Ableitbarkeitsrelation zum Ausdruck, auf die wir später gelegentlich hinweisen werden.

2.3. Hülleneigenschaften der Ableitbarkeitsrelation.

a) $X \subseteqq Ab(X)$.

b) *Wenn* $X_1 \subseteqq X_2$, *so* $Ab(X_1) \subseteqq Ab(X_2)$.

c) $Ab\big(Ab(X)\big) = Ab(X)$.

Im weiteren Verlauf dieser Untersuchung werden wir an verschiedenen Stellen verwenden, daß gewisse Typen von Ausdrücken n-wertig aussagenlogisch allgemeingültig sind. Diejenigen, die am häufigsten vorkommen, stellen wir in dem folgenden Satz zusammen. Dabei ist es zweckmäßig, einige Abkürzungen zu verwenden:

$$H_1 \vee H_2 = (H_1 \to H_2) \to H_2,^2)$$

$$H_1 \vee H_2 \vee \cdots \vee H_i = \big(\cdots ((H_1 \vee H_2) \vee H_3) \vee \cdots \vee H_i\big) \qquad (i \geqq 1),$$

$$H_1 \underset{0}{\longrightarrow} H_2 = H_2, \qquad H_1 \underset{i+1}{\longrightarrow} H_2 = H_1 \to (H_1 \underset{i}{\longrightarrow} H_2).$$

[1]) Schröter [22], I, Seite 63.

[2]) Die durch den Ausdruck $H_1 \vee H_2$ repräsentierte zweistellige aussagenlogische Wahrheitsfunktion ordnet jedem geordneten Paar $[w_1, w_2]$ von Wahrheitswerten aus M^n das Maximum der Menge $\{w_1, w_2\}$ (bezüglich der in M^n eingeführten Ordnung $\leqq$) zu. — Wir wollen für das Folgende festsetzen, daß $\to$ stärker trennt als $\vee$.

2.4 *Alle Ausdrücke der folgenden Formen sind n-wertig aussagenlogisch allgemeingültig*:

a) $H \to H$,

b) $H_1 .\to. H_2 \to H_1$,

c) $H_1 .\to. H_2 \to H_3 :\to: H_2 .\to. H_1 \to H_3$,

d) $H_1 \to H_2 :\to: H_2 \to H_3 .\to. H_1 \to H_3$,

e) $H_1 \to H_2 :\to: H_3 \to H_1 .\to. H_3 \to H_2$,

f) $H_1' \to H_1 .:\to:. H_2 \to H_2' :\to: H_1 \to H_2 .\to. H_1' \to H_2'$,

g) $H_1 \to H_2 .\to. H_2 :\to: H_2 \to H_1 .\to. H_1$,

h) $H_1 \to H_1 .\to. H_2 :\to: H_2$,

i) $H_1 \to H_3 :\to: H_2 \to H_3 .\to. H_1 \vee H_2 \to H_3$,

j) $H_1 \to H_2 :\to: (H_2 \to H_1) \to (H_3 \to H_1) .\to. H_3 \to H_2$,

k) $(H_1 \underset{i}{\to} H) .:\to:. (H_2 \underset{i}{\to} H) :\to: \cdots .\to. (H_i \underset{i}{\to} H)$
$\to \big(H_1 \to (H_2 \to \cdots \to (H_i \to H) \cdots)\big) \quad (i \geqq 1)$,

l) $H^1 .:\underset{n}{\to}:. H^2 :\underset{n}{\to}: \cdots .\underset{n}{\to}. H^i \underset{n}{\to} (F_k^i H_1 H_2 \ldots H_i \to F_k^i H_1' H_2' \ldots H_i') \quad (i \geqq 1)$,
sofern für jedes ι mit $1 \leqq \iota \leqq i$ gilt: $H^\iota = H_\iota \to H_\iota'$, falls die zu dem Funktor F_k^i gehörende Wahrheitsfunktion Φ_k^i im ι-ten Argument monoton wächst bzw. $H^\iota = H_\iota' \to H_\iota$, falls Φ_k^i in diesem Argument monoton fällt.

In den folgenden Sätzen (2.5 bis 2.7) wird gezeigt, daß einige weitere Schlußregeln unter ziemlich einfachen Voraussetzungen über die Menge X, aus der abgeleitet wird, bewiesen werden können. Mit ihrer Hilfe kann das formale Ableiten sehr vereinfacht werden. Zuvor führen wir die folgenden Abkürzungen ein: Wir sagen, daß H_1 *und* H_2 *bezüglich* X *syntaktisch äquivalent sind*, falls $X\,Abl\,H_1 \to H_2$ und $X\,Abl\,H_2 \to H_1$ und entsprechend, daß H_1 *und* H_2 *n-wertig semantisch äquivalent in* J *sind*, falls $ag_J^n H_1 \to H_2$ und $ag_J^n H_2 \to H_1$.

2.5. Regel der freien Umbenennung.[1])

Wenn $aga^n \subseteqq X$, $X\,Abl\,H_1$ *und* H_1 *durch eine freie Umbenennung (unter Vermeidung von Variablenkollision und Variablenkonfusion) in* H_2 *übergeht, so* $X\,Abl\,H_2$.

2.6 Syntaktisches Ersetzbarkeitstheorem.

Ist $aga^n \subseteqq X$, *geht* H_1 *mittels Ersetzung von* H_0 *an gewissen Stellen durch* H_{00} *in* H_2 *über und sind schließlich* H_0 *und* H_{00} *bezüglich* X *syntaktisch äquivalent, so sind auch* H_1 *und* H_2 *bezüglich* X *syntaktisch äquivalent.*

2.7. Syntaktische Bernayssche Einsetzungsregel.[2])

Ist X *gegenüber freien Umbenennungen und* Bernaysschen *Einsetzungen abgeschlossen, ist ferner* $X\,Abl\,H_1$ *und geht* H_1 *durch eine* Bernayssche *Einsetzung in* H_2 *über, so ist auch* $X\,Abl\,H_2$.

---

[1]) Zum Begriff der freien Umbenennung vgl. man Asser [2], Seite 8.

[2]) Zum Begriff der Bernaysschen *Einsetzung* vgl. z. B. Asser [2], Seite 9—10. Eine allgemeinere Formulierung der syntaktischen Bernaysschen Einsetzungsregel findet sich bei Schröter [22], I, Seite 69—70.

Beweise. — 2.5. Wir schalten vor H_1 eine geeignete ableitbare Prämisse, wenden die Regeln *Umgbd* und *Umsofo* an und trennen dann die Prämisse wieder ab. — 2.6. Induktion über die Ausdrucksstufe von H_1. — 2.7. Induktion über die Stufe der Ableitbarkeit von H_1 aus X.

Als nächstes beweisen wir die folgenden Verschiebungssätze für die Quantifikatoren.

2.8. *Ist* $aga^n \subseteq X$ *und kommt* a_j *in* H_1 *nicht vor, so sind bezüglich* X *syntaktisch äquivalent die Ausdrücke*:

a) $\forall a_j(H_1 \to H_2(a_j))$ *und* $H_1 \to \forall a_j H_2(a_j)$,
$\exists a_j(H_1 \to H_2(a_j))$ *und* $H_1 \to \exists a_j H_2(a_j)$;

b) $\forall a_j(H_2(a_j) \to H_1)$ *und* $\exists a_j H_2(a_j) \to H_1$,
$\exists a_j(H_2(a_j) \to H_1)$ *und* $\forall a_j H_2(a_j) \to H_1$.

2.9. *Ist* $aga^n \subseteq X$, $1 \leqq \iota \leqq i$ *und sind* $H_1, \ldots, H_\iota, \ldots, H_i$ *Ausdrücke, für die die Variable* a_j *in* H_ι *vollfrei, dagegen in den anderen nicht vorkommt, so gilt*:

a) *Ist die zu dem Funktor* F_k^i *gehörende Wahrheitsfunktion* Φ_k^i *im* ι*-ten Argument monoton wachsend, so sind bezüglich* X *syntaktisch äquivalent die Ausdrücke*:

$\forall a_j F_k^i H_1 \ldots H_\iota(a_j) \ldots H_i$ *und* $F_k^i H_1 \ldots \forall a_j H_\iota(a_j) \ldots H_i$,
$\exists a_j F_k^i H_1 \ldots H_\iota(a_j) \ldots H_i$ *und* $F_k^i H_1 \ldots \exists a_j H_\iota(a_j) \ldots H_i$;

b) *Ist die zu dem Funktor* F_k^i *gehörende Wahrheitsfunktion* $\Phi_k^{[i]}$ *im* ι*-ten Argument monoton fallend, so sind bezüglich* X *syntaktisch äquivalent die Ausdrücke*:

$\forall a_j F_k^i H_1 \ldots H_\iota(a_j) \ldots H_i$ *und* $F_k^i H_1 \ldots \exists a_j H_\iota(a_j) \ldots H_i$,
$\exists a_j F_k^i H_1 \ldots H_\iota(a_j) \ldots H_i$ *und* $F_k^i H_1 \ldots \forall a_j H_\iota(a_j) \ldots H_i$.

Beweis von 2.8. — Von allen hierzu notwendigen Ableitungen sind nur die für die Ausdrücke

(1) $\forall a_j(H_1 \to H_2(a_j)) .\to. H_1 \to \forall a_j H_2(a_j)$,
(2) $\forall a_j H_2(a_j) \to H_1 .\to. \exists a_j(H_2(a_j) \to H_1)$,
(3) $H_1 \to \exists a_j H_2(a_j) .\to. \exists a_j(H_1 \to H_2(a_j))$

etwas schwieriger. Wir geben deshalb nur diese an. Dabei denken wir uns die restlichen Behauptungen von 2.8 bereits bewiesen und werden diese im folgenden benutzen. Außerdem weisen wir darauf hin, daß es zweckmäßig ist, die Ausdrücke in der angegebenen Reihenfolge abzuleiten, weil wir die erhaltenen Resultate jeweils bei dem nächsten Beweis verwenden können.

Es sei also stets $aga^n \subseteq X$, außerdem komme a_j in H_1 nicht vor.

ad (1). Offenbar genügt es, die folgende Regel zu beweisen:

Wenn $X\,Abl\,H^* .\to. H^{**} \to H(a_j)$ *und* a_j *weder in* H^* *noch* H^{**} *vorkommt, so* $X\,Abl\,H^* .\to. H^{**} \to \forall a_j H(a_j)$.

Ist also $H^* .\to. H^{**} \to H(a_j)$ aus X ableitbar, so folgt daraus mit der Prämissenvertauschung sowie den Kettenschlüssen, daß

$$X\,Abl\,H^* \to (H^{**} \to \forall a_j H(a_j)) .\to. \forall a_j H(a_j) :\to: H(a_j) \vee \forall a_j H(a_j).$$

Da nun auf Grund von 2.4i)

$$X\,Abl\,H(a_j) \vee \forall a_j H(a_j) \to H(a_j),$$

ergibt sich mit Kettenschluß und hinterer Generalisierung, daß

$$X\,Abl\,H^* \to \big(H^{**} \to \forall a_j H(a_j)\big) .\to. \forall a_j H(a_j) :\to: \forall a_j H(a_j)$$

und weiter mit 2.4g), daß

$$X\,Abl\,\forall a_j H(a_j) .\to. H^* \to \big(H^{**} \to \forall a_j H(a_j)\big) :\to: H^* \to \big(H^{**} \to \forall a_j H(a_j)\big).$$

Daraus folgt aber durch Abtrennen der aus X ableitbaren Prämisse

$$\forall a_j H(a_j) .\to. H^* \to \big(H^{**} \to \forall a_j H(a_j)\big)$$

sofort die Behauptung.

ad (2). Auf Grund von 2.4j) sind aus X ableitbar alle Ausdrücke der Form

$$H_1' \to H_2' :\to: (H_2' \to H_1') \to (H_3' \to H_1') .\to. H_3' \to H_2'.$$

Setzt man

$$\begin{aligned} H_1' &= H_1, \\ H_2' &= \exists a_j\big(H_2(a_j) \to H_1\big), \\ H_3' &= \forall a_j H_2(a_j) \to H_1, \end{aligned}$$

so genügt es offenbar, zu zeigen, daß

$$X\,Abl\,\exists a_j\big(H_2(a_j) \to H_1\big) \to H_1 .\to. \big(\forall a_j H_2(a_j) \to H_1\big) \to H_1.$$

Nach Kettenschluß ist klar, daß

$$X\,Abl\,\exists a_j\big(H_2(a_j) \to H_1\big) \to H_1 .\to. \big(H_2(a_j) \to H_1\big) \to H_1,$$

also auf Grund von 2.4g), der Prämissenvertauschung und der Kettenschlüsse, daß auch

$$X\,Abl\,\exists a_j(H_2(a_j) \to H_1) \to H_1 .\to. \big(H_1 \to \forall a_j H_2(a_j)\big) \to H_2(a_j),$$

und daraus folgt durch Anwendung des eben in (1) bewiesenen Resultats sowie mit 2.4g) das Gewünschte.

ad (3). Gehen wir bei der vorstehenden Ableitung wieder von

$$H_1' \to H_2' :\to: (H_2' \to H_1') \to (H_3' \to H_1') .\to. H_3' \to H_2'$$

aus, setzen aber diesmal

$$\begin{aligned} H_1' &= \forall a_j H_2(a_j), \\ H_2' &= H_2(a_j), \\ H_3' &= H_1, \end{aligned}$$

so ergibt sich durch Abtrennung der aus X ableitbaren Prämisse $\forall a_j H_2(a_j) \to H_2(a_j)$, daß

$$X\,Abl\,H_2(a_j) \to \forall a_j H_2(a_j) .\to. H_1 \to \forall a_j H_2(a_j) :\to: H_1 \to H_2(a_j),$$

also für geeignetes a_i, daß auch

$$X\,Abl\,\exists a_j\big(H_2(a_j) \to \forall a_i H_2(a_i) .\to. H_1 \to \forall a_i H_2(a_i)\big) \to \exists a_j\big(H_1 \to H_2(a_j)\big).$$

Wendet man nun (2) an, so erhält man:

$$X\,Abl\,\forall a_j\big(H_2(a_j) \to \forall a_i H_2(a_i)\big) .\to. H_1 \to \forall a_i H_2(a_i) :\to: \exists a_j\big(H_1 \to H_2(a_j)\big).$$

Da aber außerdem

$$X\,Abl\,\forall a_j\big(H_2(a_j) \to \forall a_i H_2(a_i)\big) .\to. \exists a_j H_2(a_j) \to \forall a_i H_2(a_i),$$

folgt mit Kettenschluß, daß

$$X\,Abl\,\exists a_j H_2(a_j) \to \forall a_i H_2(a_i) .\to. H_1 \to \forall a_i H_2(a_i) :\to: \exists a_j\big(H_1 \to H_2(a_j)\big)$$

und daraus folgt wieder mit Kettenschluß, daß schließlich

$$X\,Abl\,H_1 \to \exists a_j H_2(a_j) .\to. \exists a_j\big(H_1 \to H_2(a_j)\big).$$

Beweis von 2.9. — Alle in diesem Beweis notwendigen Ableitungen verlaufen ohne Schwierigkeiten, wenn man Satz 2.8 anwendet. — Zur Illustration wollen wir den Verschiebungssatz des Generalisators $\forall$ für die erste Stelle eines Funktors F^i_k, dessen zugehörige Wahrheitsfunktion Φ^i_k an dieser Stelle monoton wachsend ist, beweisen. Dazu haben wir unter den Voraussetzungen des Satzes 2.9 die Ausdrücke

(1) $\forall a_j F^i_k H_1(a_j) H_2 \ldots H_i \to F^i_k \forall a_j H_1(a_j) H_2 \ldots H_i$,

(2) $F^i_k \forall a_j H_1(a_j) H_2 \ldots H_i \to \forall a_j F^i_k H_1(a_j) H_2 \ldots H_i$

aus X abzuleiten.

ad (1). Mit Hilfe von 2.4 a), l) erhält man zunächst, daß

$$X\,Abl\,H_1(a_j) \to \forall a_j H_1(a_j) .\underset{n}{\to}. F^i_k H_1(a_j) H_2 \ldots H_i \to F^i_k \forall a_j H_1(a_j) H_2 \ldots H_i,$$

also mit Prämissenvertauschung und *Gv*, daß

$$X\,Abl\,H_1(a_j) \to \forall a_j H_1(a_j) .\underset{n}{\to}. \forall a_j F^i_k H_1(a_j) H_2 \ldots H_i \to F^i_k \forall a_j H_1(a_j) H_2 \ldots H_i.$$

Auf Grund von 2.4k) und 2.5 gilt nun der folgende Hilfssatz: *Wenn* $aga^n \subseteq X$, $X\,Abl\,H(a_j) \underset{n}{\to} H^*$ *und* a_j *nicht in* H^* *vorkommt, so* $X\,Abl\,\exists a_j H(a_j) \underset{n}{\to} H^*$. — Wendet man auf den zuletzt abgeleiteten Ausdruck unseren Hilfssatz sowie 2.8 an, so ergibt sich, daß

$$X\,Abl\,\forall a_j H_1(a_j) \to \forall a_j H_1(a_j) .\underset{n}{\to}. \forall a_j F^i_k H_1(a_j) H_2 \ldots H_i \to F^i_k \forall a_j H_1(a_j) H_2 \ldots H_i$$

und hieraus folgt, wenn man die aus X ableitbaren Prämissen $\forall a_j H_1(a_i) \to \forall a_j H_1(a_j)$ abtrennt, sofort die Behauptung.

ad (2). Wie im Beweis von (1) ergibt sich, daß

$$X\,Abl\,\forall a_j H_1(a_j) \to H_1(a_j) \underset{n}{\to} F^i_k \forall a_j H_1(a_j) H_2 \ldots H_i \to F^i_k H_1(a_j) H_2 \ldots H_i.$$

Nun ist aber $\forall a_j H_1(a_j) \to H_1(a_j)$ aus X ableitbar, also dürfen wir diese Prämisse abtrennen. Mit *Gh* erhält man dann unmittelbar die Behauptung.

In den folgenden zwei Sätzen beschäftigen wir uns mit der Herstellung *pränexer* und Skolemscher *Normalformen*. Pränexe Normalformen sind wie üblich Ausdrücke, bei denen alle Quantifikatoren am Anfang stehen. Unter einer Skolem-

schen (*allgemeingültigkeitstheoretischen*) Normalform verstehen wir einen Ausdruck der Form

$$\exists a_{i_1} \ldots \exists a_{i_r} \forall a_{j_1} \ldots \forall a_{j_s} H(a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}, a_{j_1}, \ldots, a_{j_s})^1) \qquad (r \geqq 1,\ s \geqq 1),$$

wobei der „*Kern*" $H(a_{i_1}, \ldots, a_{j_s})$ quantifikatorenfrei ist. Beide Arten von Normalformen brauchen nicht notwendig abgeschlossen zu sein, d. h. es dürfen freie Individuenvariablen vorkommen. Es gelten die folgenden Sätze:

2.10. *Zu jedem Ausdruck H_1 gibt es eine pränexe Normalform H_2 derart, daß für jedes X und jedes (nicht-leere) J gilt:*

a) *Wenn $aga^n \subseteqq X$, so sind H_1 und H_2 bezüglich X syntaktisch äquivalent.*

b) *H_1 und H_2 sind n-wertig semantisch äquivalent in J.*

2.11. *Zu jedem Ausdruck H_1 gibt es eine abgeschlossene* Skolemsche *(allgemeingültigkeitstheoretische) Normalform H_2 derart, daß für jedes X und jedes (nicht-leere) J gilt:*

a) *Wenn $aga^n \subseteqq X$, so $X Abl H_1$ genau dann, wenn $X Abl H_2$.*

b) *$ag_J^n H_1$ genau dann, wenn $ag_J^n H_2$.*

Beweise. — Zunächst stellen wir fest, daß in beiden Sätzen die Bedingung b) trivial aus der Bedingung a) folgt, wenn man $X = ag_J^n$ setzt und die Sätze 2.1 bis 2.3 anwendet. — 2.10a) erhält man ohne Schwierigkeiten aus den Verschiebungssätzen für die Quantifikatoren (2.8 und 2.9). — Beim Beweis von 2.11a) dürfen wir uns wegen 2.10a) auf Ausdrücke in der pränexen Normalform beschränken. Wir dürfen ferner voraussetzen, daß die Ausdrücke abgeschlossen sind. Andernfalls schalten wir eine geeignete ableitbare Prämisse davor, generalisieren alle in dem ursprünglichen Ausdruck frei vorkommenden Individuenvariablen (eventuell nach gebundener Umbenennung) und trennen schließlich die vorgeschaltete Prämisse wieder ab. Wir kommen somit zu einer abgeschlossenen pränexen Normalform $H = \psi H'$, wobei „ψ" das *Präfix* und „H'" den quantifikatorenfreien *Kern* von H andeuten. Schließlich dürfen wir außerdem voraussetzen, daß das Präfix ψ mit $\exists$ beginnt und mit einer generalisierten Individuenvariablen endet. Andernfalls gehen wir zu dem Ausdruck

$$\exists a_j \psi(A_0^1 a_j \to A_0^1 a_j .\to. H') \quad \text{bzw.} \quad \psi \forall a_j (A_0^1 a_j \to A_0^1 a_j .\to. H')$$

über, wobei a_j eine Individuenvariable ist, die in H' nicht vorkommt. Man überzeugt sich unmittelbar, daß alle beschriebenen Übergänge die Bedingung a) (und folglich auch b)) von 2.11 nicht verletzen. Damit dürfen wir uns auf Ausdrücke in der speziellen pränexen Normalform $H = \exists \mathfrak{a}_1 \forall \mathfrak{b}_1 \ldots \exists \mathfrak{a}_l \forall \mathfrak{b}_l H'$ $(l \geqq 1)$ beschränken, wobei „$\exists \mathfrak{a}_\lambda$" bzw. „$\forall \mathfrak{b}_\lambda$" Abkürzungen für $\exists a_{i_{\lambda 1}} \ldots \exists a_{i_{\lambda r_\lambda}}$ bzw. $\forall a_{j_{\lambda 1}} \ldots \forall a_{j_{\lambda s_\lambda}}$ sind $(1 \leqq \lambda \leqq l$; alle in den $\exists \mathfrak{a}_\lambda$ und $\forall \mathfrak{b}_\lambda$ vorkommenden Individuenvariablen sind auf Grund unserer Ausdrucksdefinition paarweise verschieden). — Wir bilden

---

[1]) Vertauscht man in dem angegebenen Ausdruck die Quantifikatoren $\forall$ und $\exists$, so ist der entstehende Ausdruck eine sogenannte Skolemsche *erfüllbarkeitstheoretische* Normalform. Derartige Normalformen werden in dieser Arbeit nicht verwendet.

nun das Verfahren nach, mit dem man in zweiwertigen Prädikatenkalkülen zu dem gegebenen speziellen Ausdruck $H = \exists a_1 \forall b_1 \ldots \exists a_l \forall b_l H'$ in endlich vielen Schritten eine SKOLEMsche (allgemeingültigkeitstheoretische) Normalform mit den gewünschten Eigenschaften konstruiert. Wir betrachten dazu den Ausdruck

$$H_2' = \exists a_1 \exists b_1 \exists a_2 \forall b_1' \forall b_2 \exists a_3 \forall b_3 \ldots \exists a_l \forall b_l (H' \to A_k^{r_1+s_1} a_1 b_1 .\to. A_k^{r_1+s_1} a_1 b_1'),$$

wobei „$A_k^{r_1+s_1} a_1 b_1$" bzw. „$A_k^{r_1+s_1} a_1 b_1'$" Abkürzungen für die Ausdrücke $A_k^{r_1+s_1} a_{i_{11}} \ldots a_{i_{1r_1}} a_{j_{11}} \ldots a_{j_{1s_1}}$ bzw. $A_k^{r_1+s_1} a_{i_{11}} \ldots a_{i_{1r_1}} a_{j_1'} \ldots a_{j_{s_1}'}$ sind und die Variablen $A_k^{r_1+s_1}$, $a_{j_1'}, \ldots, a_{j_{s_1}'}$ nicht in H' vorkommen sowie die $a_{j_1'}, \ldots, a_{j_{s_1}'}$ paarweise verschieden sind. H_2' ist ein Ausdruck, der wiederum die oben beschriebene spezielle Form besitzt, bei dem aber im Präfix gegenüber H ein $\exists$-$\forall$-Komplex weniger vorkommt. Können wir nun für H und H_2' die Bedingung a) von 2.11 zeigen, so gelangen wir durch l-malige Anwendung der eben beschriebenen Konstruktion zu einer abgeschlossenen SKOLEMschen Normalform H_2, die das in 2.11a) Verlangte leistet. — Wir haben also folgendes zu beweisen:

(1) *Wenn* $aga^n \subseteq X$ *und* $X Abl H$, *so* $X Abl H_2'$.

(2) *Wenn* $aga^n \subseteq X$ *und* $X Abl H_2'$, *so* $X Abl H$.

Mit den Verschiebungssätzen für die Quantifikatoren und dem Ersetzbarkeitstheorem ergibt sich zunächst der folgende

Hilfssatz: *Ist* $aga^n \subseteq X$, *so sind die Ausdrücke* H_2' *und*

$$\exists a_1 (\forall b_1 (\exists a_2 \forall b_2 \exists a_3 \forall b_3 \ldots \exists a_l \forall b_l H' \to A_k^{r_1+s_1} a_1 b_1) \to \forall b_1 A_k^{r_1+s_1} a_1 b_1)$$

bezüglich X *syntaktisch äquivalent.* — Beim Beweis von (1) und (2) wenden wir diesen Hilfssatz jetzt wesentlich an.

ad (1). Es sei also $aga^n \subseteq X$ und $X Abl H$. Man zeigt zunächst mit 2.4 und 2.8, daß alle Ausdrücke der Form

$$\forall a_j H_1(a_j) .\to. \forall a_j (H_1(a_j) \to H_2(a_j)) \to \forall a_j H_2(a_j)$$

aus X ableitbar sind. Daraus folgt, daß aus X der Ausdruck

$$H \to \exists a_1 (\forall b_1 (\exists a_2 \forall b_2 \exists a_3 \forall b_3 \ldots \exists a_l \forall b_l H' \to A_k^{r_1+s_1} a_1 b_1) \to \forall b_1 A_k^{r_1+s_1} a_1 b_1)$$

ableitbar ist, also gilt dies nach unserem Hilfssatz auch für H_2'.

ad (2). Es sei $aga^n \subseteq X$ und $X Abl H_2'$. Auf Grund unseres Hilfssatzes ist dann aus X ableitbar der Ausdruck

$$\exists a_1 (\forall b_1 (\exists a_2 \forall b_2 \exists a_3 \forall b_3 \ldots \exists a_l \forall b_l H' \to A_k^{r_1+s_1} a_1 b_1) \to \forall b_1 A_k^{r_1+s_1} a_1 b_1).$$

Wir setzen nun den Ausdruck $\exists a_2 \forall b_2 \exists a_3 \forall b_3 \ldots \exists a_l \forall b_l H'$ für $A_k^{r_1+s_1} a_1 b_1$ ein. Nach der BERNAYSschen Einsetzungsregel ist dann ebenfalls aus X das Resultat

$$\exists a_1 (\forall b_1 (\exists a_2 \forall b_2 \ldots \exists a_l \forall b_l H' \to \exists a_2 \forall b_2 \ldots \exists a_l \forall b_l H') \to \forall b_1 \exists a_2 \forall b_2 \ldots \exists a_l \forall b_l H')$$

ableitbar, also gilt dies auf Grund von 2.4 b), h) und 2.6 auch für H.

Für einzelne Beweise in den Paragraphen 3 und 5 ist der folgende Satz von großer Bedeutung. Er ist eine Verallgemeinerung der Kontraposition von 2.11 b) auf Mengen von Ausdrücken.

2.12. *Zu jeder Menge X gibt es eine Menge X', so daß*

a) *alle Ausdrücke aus X'* Skolemsche *(allgemeingültigkeitstheoretische) Normalformen sind und*

b) *es eine eineindeutige Abbildung φ von der Gesamtheit aller Teilmengen Y von X auf die Gesamtheit aller Teilmengen Y von X auf die Gesamtheit aller Teilmengen Y' von X' gibt, so daß für jeden Individuenbereich J gilt: Y besitzt in J ein n-wertiges F-Modell $[f_1, f_2]$ genau dann, wenn $\varphi(Y)$ in J ein n-wertiges F-Modell $[f_1', f_2']$ besitzt.*

Beweis. Wir weisen zunächst darauf hin, daß im Gegensatz zu Satz 2.11 die Ausdrücke in X' im allgemeinen nicht abgeschlossen gewählt werden können. — Auf Grund von 2.10 kann man sich beim Beweis von 2.12 offenbar auf Mengen X beschränken, deren Elemente sich sämtlich in der pränexen Normalform befinden. Als nächstes reduzieren wir den Beweis durch eine simultane Umbenennung aller Prädikatenvariablen (z. B. durch Verdopplung aller Unterscheidungsindizes k) auf solche Mengen X, für die es zu jeder Stellenzahl $i \geqq 1$ unendlich viele Prädikatenvariablen A_k^i gibt, die in sämtlichen Elementen von X nicht vorkommen. Jetzt konstruieren wir durch simultane Anwendung des im Beweis von 2.11 beschriebenen Verfahrens eine Menge X' von Ausdrücken in der Skolemschen Normalform, wobei wir beachten, daß bei jedem Ausdruck neue Prädikatenvariablen verwendet werden. $\varphi(Y)$ sei dann die zu einer Menge $Y \subseteq X$ erhaltene Menge. (Durch Wohlordnung von X kann das Konstruktionsverfahren eindeutig gemacht werden). — (1) Es sei nun $[f_1, f_2]$ ein n-wertiges F-Modell von $Y \subseteq X$ in J. Ist nun $H \in Y$ und H' der zugehörige Ausdruck aus $\varphi(Y)$, so geht H' durch endlich viele Bernayssche Einsetzungen in einen Ausdruck H'' über, der mit H n-wertig semantisch äquivalent in J ist. Dabei sind gewissen prädikativen Ausdrücken (*Nennformen*) gewisse Ausdrücke (*Substituenden*) zugeordnet, die ihrerseits bezüglich der Belegung f_2 gewisse n-wertige Attribute über J charakterisieren. Dann ist aber $[f_1, f_2']$ ein n-wertiges *F-Modell* von $\varphi(Y)$ in J, falls f_2' aus f_2 dadurch entsteht, daß man den Prädikatenvariablen, die in den Nennformen vorkommen, die durch ihre Substituenden definierten Attribute zuordnet (und an allen anderen Stellen unverändert läßt).[1]) — (2) Die Umkehrung ergibt sich sofort aus der Tatsache, daß $aga^n Abl H \to H'$, also $ag_J^n H \to H'$ ist. Beweis dieses Hilfssatzes wie in 2.11.

§ 3. Reduktionstheoreme. Das Repräsentantenproblem

Wir stellen uns in diesem Paragraphen die Aufgabe, einen vollständigen Überblick über alle eingeführten Arten von Allgemeingültigkeit zu gewinnen.

Einen gewissen Überblick erhalten wir schon durch die drei folgenden Reduktionstheoreme:

3.1. *Wenn $Kz(J)$[2]) $= \mathfrak{m}$, so $ag_J^n = ag_{\mathfrak{m}}^n$ $(\mathfrak{m} \geqq 1)$.*

[1]) Genau genommen, ist dies ein Beweis für die auf Mengen verallgemeinerte Kontraposition der sogenannten semantischen Bernaysschen Einsetzungsregel: *Wenn $ag_J^n H_1$ und H_1 geht durch eine* Bernayssche *Einsetzung in H_2 über, so ist auch $ag_J^n H_2$.*

[2]) Wir deuten durch „$Kz(J)$" die Kardinalzahl des Individuenbereiches J an.

3.2. a) *Wenn* $\mathfrak{m}_1 \leqq \mathfrak{m}_2$, *so* $ag^n_{\mathfrak{m}_1} \supseteq ag^n_{\mathfrak{m}_2}$ $(\mathfrak{m}_1 \geqq 1)$.

b) *Wenn* $k < \aleph_0 \leqq \mathfrak{m}$, *so* $ag^n_k \supseteq ag^n_{end} \supseteq ag^n_{\mathfrak{m}} \supseteq ag^n$ $(k \geqq 1)$.

3.3. Satz von Löwenheim-Skolem.

Wenn $\aleph_0 \leqq \mathfrak{m}$, *so* $ag^n_{\aleph_0} = ag^n_{\mathfrak{m}}$.

Beweise für diese Behauptungen ergeben sich unmittelbar aus den drei folgenden Sätzen, wenn wir darin $X = \{H\}$ setzen und sie dann kontraponieren. Im Paragraphen 5 werden wir dagegen die Sätze 3.4 bis 3.6 in der allgemeinen Form (d. h. für beliebige Mengen X) anwenden.

3.4. *Wenn* $Kz(J) = Kz(J')$, *so besitzt* X *ein* n*-wertiges* F*-Modell* $[f_1, f_2]$ *in* J *genau dann, wenn* X *ein* n*-wertiges* F*-Modell* $[f'_1, f'_2]$ *in* J' *besitzt.*

3.5. *Wenn* $Kz(J) \leqq Kz(J')$ *und* X *besitzt ein* n*-wertiges* F*-Modell* $[f_1, f_2]$ *in* J, *so besitzt* X *auch ein* n*-wertiges* F*-Modell* $[f'_1, f'_2]$ *in* J'.

3.6. *Wenn* J *unendlich und* J' *abzählbar, so besitzt* X *ein* n*-wertiges* F*-Modell* $[f_1, f_2]$ *in* J *genau dann, wenn* X *ein* n*-wertiges* F*-Modell* $[f'_1, f'_2]$ *in* J' *besitzt.*

Beweise. — 3.4. Da $Kz(J) = Kz(J')$ ist, gibt es eine eineindeutige Abbildung φ von J' auf J. Gegeben sei ein n-wertiges F-*Modell* $[f_1, f_2]$ einer Menge X in J. Mit Hilfe von φ definieren wir Belegungen f'_1 und f'_2 über J' auf Grund der folgenden Bedingungen:

$$f'_1(a_j) = \varphi^{-1}(f_1(a_j)) \qquad (j \geqq 0),$$

$$f'_2(A^i_k)[x'_1, \ldots, x'_i] = f_2(A^i_k)[\varphi(x'_1), \ldots, \varphi(x'_i)] \qquad (x'_1, \ldots, x'_i \in J').$$

Für die so konstruierten f'_1, f'_2 beweist man durch Induktion über die Ausdrucksstufe von H leicht, daß $Wert^n_J(H; f_1, f_2) = Wert^n_{J'}(H; f'_1, f'_2)$. Daraus folgt aber sofort, daß $[f'_1, f'_2]$ ein n-wertiges F-Modell von X und J' ist. Somit ist 3.4 in der Richtung von links nach rechts bewiesen. — Die Umkehrung ergibt sich ebenso.

3.5. Dieser Beweis unterscheidet sich von dem vorstehenden im wesentlichen nur dadurch, daß das Auswahlaxiom benutzt wird. Wegen $Kz(J) \leqq Kz(J')$ gibt es eine eindeutige Abbildung φ von J' auf J. Es sei wiederum ein n-wertiges F-Modell $[f_1, f_2]$ der Menge X in J gegeben; außerdem sei J' wohlgeordnet.

Die folgenden Bedingungen definieren nun ähnlich oben gewisse Belegungen f'_1 und f'_2 über J':

$f'_1(a_j) =$ Das kleinste $x' \in J'$ (bezüglich der gegebenen Wohlordnung von J'), so daß $\varphi(x') = f_1(a_j)$ ist $(j \geqq 0)$;

$$f'_2(A^i_k)[x'_1, \ldots, x'_i] = f_2(A^i_k)[\varphi(x'_1), \ldots, \varphi(x'_i)] \qquad (x'_1, \ldots, x'_i \in J').$$

Alle weiteren Beweisschritte verlaufen wie im Beweis von 3.4.

3.6. Wir beweisen diesen Satz, indem wir den ursprünglichen Skolemschen Beweis des entsprechenden Satzes aus dem zweiwertigen Prädikatenkalkül auf n-wertige F-Modelle übertragen.[1]) Dabei werden wesentlich die Skolemschen (allgemein-

[1]) Skolem [27], § 1.

gültigkeitstheoretischen)[1]) Normalformen benutzt. — Auf Grund von 3.4 und 3.5 genügt es, den folgenden Satz zu beweisen: *Ist J unendlich und ist $[f_1, f_2]$ ein n-wertiges F-Modell von X in J, so gibt es einen höchstens abzählbar-unendlichen Individuenbereich J', in dem die Menge X ein n-wertiges F-Modell $[f_1', f_2']$ besitzt.* — Mit 9.12 führen wir diesen Satz zunächst auf Mengen X zurück, deren sämtliche Elemente Skolemsche (allgemeingültigkeitstheoretische) Normalformen sind. Außerdem genügt es, wie man sofort einsieht, ihn für abzählbar-unendliche Mengen zu beweisen. Es sei also ein solches X gegeben, etwa

$$X = \{\exists \mathfrak{a}_0 \forall \mathfrak{b}_0 H_0,\ \exists \mathfrak{a}_1 \forall \mathfrak{b}_1 H_1,\ \ldots,\ \exists \mathfrak{a}_k \forall \mathfrak{b}_k H_k,\ \ldots\},$$

wobei die $\mathfrak{a}_k$ bzw. $\mathfrak{b}_k$ Abkürzungen für r_k- bzw. s_k-Tupel von paarweise verschiedenen Individuenvariablen sind.[2]) Nach Voraussetzung gilt für alle $k \geqq 0$: $Wert_J^n(\exists \mathfrak{a}_k \forall \mathfrak{b}_k H_k; f_1, f_2) \prec W$. Das ist aber nach Interpretation von $\exists$ und $\forall$ sowie nach § 2, Lemma 3 genau dann der Fall, wenn es zu jedem $k \geqq 0$ und jedem r_k-Tupel $[x_1, \ldots, x_{r_k}]$ von Elementen aus J ein s_k-Tupel $[y_1, \ldots, y_{s_k}]$ von Elementen (ebenfalls aus J) gibt, so daß $Wert_J^n(H_k; f_1', f_2) \prec W$, falls die Belegung f_1' dem r_k-Tupel $\mathfrak{a}_k$ das r_k-Tupel $[x_1, \ldots, x_{r_k}]$ und dem s_k-Tupel $\mathfrak{b}_k$ das s_k-Tupel $[y_1, \ldots, y_{s_k}]$ zuordnet und an den anderen Stellen mit f_1 übereinstimmt. Die Menge aller s_k-Tupel aus J sei für jedes $k \geqq 0$ wohlgeordnet. *Das zu einem r_k-Tupel gehörige s_k-Tupel* (beide aus J) sei das erste s_k-Tupel bezüglich der vorgegebenen Wohlordnung, das die oben beschriebene Eigenschaft besitzt. — Gegeben sei nun eine nicht-leere höchstens abzählbar-unendliche Menge M aus J. Es sei T_k die Menge aller r_k-Tupel, die aus den Elementen aus M gebildet werden können, T_k' die Menge aller zu den r_k-Tupeln aus T_k gehörigen s_k-Tupel, und schließlich sei M_k' die Menge aller Individuen, aus denen die s_k-Tupel aus T_k' gebildet sind. (M_k' ist im allgemeinen nicht Teilmenge von M, jedoch stets von J.) Da M nicht-leer und höchstens abzählbar-unendlich und die Ausdrucksmenge X abzählbar unendlich ist, sind auch die Mengen T_k, T_k' und M_k' höchstens abzählbar-unendlich, also auch die *Menge* $M' = \bigcup_{k=0}^{\infty} M_k'$. Mit Hilfe des Überganges von M zu M' definieren wir induktiv eine Mengenfolge:

$$M_0 = \{f_1(a_j)\}_{j \geqq 0}, \qquad M_{i+1} = M_i \cup M_i'$$

und bilden schließlich $J' = \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$. Dann ist J' höchstens abzählbar-unendlich, außerdem ist J' nicht-leer und in J enthalten. Wir konstruieren nun Belegungen f_1', f_2' über J' durch die Bedingungen:

$$f_1'(a_j) = f_1(a_j) \qquad (j \geqq 0),$$
$$f_2'(A_k^i)[x_1', \ldots, x_i'] = f_2(A_k^i)[x_1', \ldots, x_i'] \qquad (x_1', \ldots, x_i' \in J'),$$

d. h. A_k^i wird durch f_2' mit der Einschränkung des Attributs $f_2(A_k^i)$ auf den Bereich J' belegt.

Nach Konstruktion von J' leisten diese Belegungen offenbar das Gewünschte.

[1]) Skolem arbeitet mit erfüllbarkeitstheoretischen Normalformen. Siehe Seite 122 dieser Arbeit.

[2]) Zu den Abkürzungen $\exists \mathfrak{a}_k$ und $\forall \mathfrak{b}_k$ vgl. Seite 123 dieser Arbeit.

Der folgende Satz, den man aus 3.1 bis 3.3 erhält, liefert eine Klassifikation aller betrachteten Mengen von allgemeingültigen Ausdrücken.

3.7. a) *Jede der Mengen* ag^n_J, $ag^n_{\mathfrak{m}}$, ag^n_{end} *und* ag^n *ist gleich einer der Mengen:* ag^n_1, $ag^n_2, \ldots, ag^n_k, \ldots, ag^n_{end}$ *und* ag^n ($k \geqq 1$, *natürliche Zahl*).

b) $ag^n_1 \supseteq ag^n_2 \supseteq \cdots \supseteq ag^n_k \supseteq \cdots \supseteq ag^n_{end} \supseteq ag^n_{\aleph_0} = ag^n$.

Das jetzt folgende sogenannte Repräsentantentheorem besagt, daß in 3.7b) alle Inklusionen echt sind.

3.8. a) *Zu jeder natürlichen Zahl* $k \geqq 1$ *gibt es einen Ausdruck* H_k, *so daß für jede natürliche Zahl* $n \geqq 2$ *gilt:* $ag^n_k H_k$ *und nicht* $ag^n_{k+1} H_k$.

b) *Zu jeder natürlichen Zahl* $n \geqq 2$ *gibt es einen Ausdruck* H^n_{end}, *so daß* $ag^n_{end}\, H^n_{end}$ *und nicht* $ag^n H^n_{end}$.

Beweis. a) Als H_k wählen wir den Ausdruck

$$(A^1_1 a_1 \to A^1_1 a_2) \vee \big(A^1_2 a_1 \to (A^1_2 a_2 \to A^1_2 a_3)\big) \vee \cdots \vee (A^1_k a_1 \to (A^1_k a_2 \to (\cdots \to (A^1_k a_k \to A^1_k a_{k+1}) \ldots)).$$

Besitzt nun ein Individuenbereich die Mächtigkeit k, so wird bei jeder Belegung f_1, f_2 über J mindestens zwei der Individuenvariablen $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ dasselbe Element zugeordnet, also nimmt mindestens ein Glied

$$(A^1_\varkappa a_1 \to (A^1_\varkappa a_2 \to (\cdots \to (A^1_\varkappa a_\varkappa \to A^1_\varkappa a_{\varkappa+1}) \ldots)) \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq k)$$

von H_k den Wert W an. Nach Definition von $\vee$ nimmt dann auch H_k stets den Wert W an. — Um zu zeigen, daß H_k im $(k+1)$-zahligen nicht allgemeingültig ist, wählen wir $J = \{1, 2, \ldots, k, k+1\}$ und $f_1(a_j) = j$ für $1 \leqq j \leqq k+1$ (sonst $f_1(a_j)$ beliebig aus J). Ferner sei $f_2(A^1_\varkappa)[j] = W$, falls $1 \leqq j \leqq \varkappa$ und $f_2(A^1_\varkappa)[j] = F_{n-1}$, falls $\varkappa + 1 \leqq j \leqq k+1$. Hierbei ist $1 \leqq \varkappa \leqq k$. Den anderen Prädikatenvariablen werden beliebige n-wertige Attribute über J zugeordnet (wobei natürlich die Stellenzahl i von A^i_k mit der Stellenzahl des zugeordneten Attributs übereinstimmen muß). Man rechnet leicht aus, daß bei der so konstruierten Belegung H_k den Wert F_{n-1} annimmt. — Bei dieser Konstruktion ist bemerkenswert, daß wir H_k unabhängig von n wählen konnten.

b) Anstatt a_0, a_1, a_2 und A^2_0 schreiben wir in dieser Reihenfolge jetzt a, b, c und R. Wir betrachten nun den Ausdruck

$$H^n_{end} = \forall a \exists b Rab \underset{n}{\to} (\forall a \forall b \forall c (Rab \mathrel{.\!\to\!.} Rbc \to Rac) \underset{n}{\to} \exists a Raa).$$

Wir zeigen zuerst, daß H^n_{end} in jedem endlichen Individuenbereich J n-wertig allgemeingültig ist. Beweis indirekt. Wir nehmen an, daß es einen endlichen (etwa k-zahligen) Individuenbereich $J = \{x_1, \ldots, x_k\}$ und eine Belegung f_1, f_2 über J gibt, so daß gilt: $Wert^n_J(H^n_{end}; f_1, f_2) < W$. Dies ist aber gleichwertig damit, wenn man die Definition von C^n beachtet, daß

(1) $Wert^n_J(\forall a \exists b Rab; f_1, f_2) = W$;

(2) $Wert^n_J(\forall a \forall b \forall c (Rab \mathrel{.\!\to\!.} Rbc \to Rac); f_1, f_2) = W$;

(3) $Wert^n_J(\exists a Raa; f_1, f_2) < W$.

Es sei α das Attribut $f_2(R)$. Aus (1) bis (3) folgt dann:

(1′) Zu jedem $x \in J$ gibt es ein $y \in J$, so daß $\alpha[x, y] = W$;

(2′) Für jedes $x, y, z \in J$: Wenn $\alpha[x, y] = W$ und $\alpha[y, z] = W$, so $\alpha[x, z] = W$;

(3′) Für jedes $x \in J$: $\alpha[x, x] \prec W$.

Wir definieren nun mit Hilfe von α eine binäre Relation $\Re$ über J: $\Re x y$ genau dann, wenn $\alpha[x, y] = W$ $(x, y \in J)$. Aus (1′) bis (3′) folgt dann, daß $\Re$ fortlaufend, transitiv und irreflexiv ist. Eine solche Relation kann es aber über einem endlichen Bereich nicht geben. — Wir haben schließlich noch zu zeigen, daß H^n_{end} nicht in jedem Individuenbereich n-wertig allgemeingültig ist. Wir wählen

$J = \{0, 1, \ldots, k, \ldots\}$ (Menge der natürlichen Zahlen),

$f_1(a_j) = j$,

$f_2(R)[x, y] = \begin{cases} W, & \text{falls } x < y \\ F_{n-1}, & \text{falls } x \geqq y \end{cases}$ (gewöhnliche Ordnung im Bereich der Zahlen).

Die anderen Prädikatenvariablen werden wieder mit beliebigen Attributen über J belegt. — Für die so konstruierten Belegungen gelten dann offenbar die oben formulierten Bedingungen (1) bis (3), also gilt: $Wert^n_J(H^n_{end}; f_1, f_2) \prec W$.

§ 4. Axiomatisierungstheoreme

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, die verbliebenen Mengen $ag^n_1, ag^n_2, \ldots ag^n_k, \ldots$ ag^n_{end} und ag^n zu *axiomatisieren*, d. h. als Ableitungsmengen gewisser entscheidbarer[1]) Mengen (*Axiomensysteme*) darzustellen. Mit Ausnahme der Menge ag^n_{end}, für die schon im Fall $n = 2$ dieses Problem nicht lösbar ist[2]), werden wir durch Orientierung an den Methoden, die von GÖDEL und WAJSBERG im klassischen zweiwertigen Prädikatenkalkül entwickelt worden sind, bei allen anderen der oben angegebenen Mengen das gesteckte Ziel erreichen.

Wir beschäftigen uns zunächst mit der Menge ag^n. Es gilt der folgende Satz.

4.1. Axiomatisierungstheorem für die Menge der in jedem (nichtleeren) Individuenbereich n-wertig allgemeingültigen Ausdrücke.

Für jedes H: $aga^n Abl H$ genau dann, wenn $ag^n H$.

Beweis. I. Die Richtung von links nach rechts (*semantische Widerspruchsfreiheit*) erhält man sofort mit Hilfe der Sätze 2.1 und 2.2.

II. Den Beweis der Umkehrung (*semantische Vollständigkeit*) führen wir zunächst mit Satz 2.11 auf abgeschlossene Ausdrücke in der SKOLEMschen (allgemeingültigkeitstheoretischen) Normalform zurück. Unser Ausdruck H habe also die Form

$$\exists a_{i_1} \ldots \exists a_{i_r} \forall a_{j_1} \ldots \forall a_{j_s} H'(a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}, a_{j_1}, \ldots, a_{j_s}),$$

[1]) Damit die im folgenden betrachteten Mengen aga^n und ax^n_k entscheidbar sind, muß man natürlich fordern, daß die Menge Ω selbst entscheidbar ist. Auf die Gültigkeit der Sätze 4.1 und 4.2 hat dies jedoch keinen Einfluß. Man vgl. dazu Seite 114 dieser Arbeit.

[2]) Трахтенброт [29].

wobei $r \geqq 1$, $s \geqq 1$, H abgeschlossen und H' quantifikatorenfrei sind. Wir kürzen im folgenden den Ausdruck H durch „$\exists \mathfrak{a} \forall \mathfrak{b} H'(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$“ ab. — Ähnlich dem klassischen Beweis von GÖDEL[1]) wird nun der gegebene spezielle Ausdruck H *symbolisch aufgelöst*, d. h. es wird zu H eine unendliche Menge $X = \{H_0, \ldots, H_k, \ldots\}$ von quantifikatorenfreien Ausdrücken nach dem folgenden Verfahren konstruiert. Es seien $(\mathfrak{a}_k)_{k \geqq 0}$ und $(\mathfrak{b}_k)_{k \geqq 0}$ Folgen von r- bzw. s-Tupeln von Individuenvariablen, welche die nachstehenden Eigenschaften besitzen:

(1) In der Folge $(\mathfrak{a}_k)_{k \geqq 0}$ kommen alle r-Tupel von Individuenvariablen als Glieder vor.

(2) In einem beliebigen s-Tupel $\mathfrak{b}_k$ kommen nur solche Individuenvariablen vor, die in den Tupeln $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k$ und $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_{k-1}$ nicht vorkommen. Außerdem sind die Variablen in jedem $\mathfrak{b}_k$ paarweise verschieden.

Es ist unmittelbar klar, daß solche Folgen stets existieren. Wir definieren nun die Elemente von X induktiv:

$$H_0 = H'(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0), \qquad H_{k+1} = H_k \vee H'(\mathfrak{a}_{k+1}, \mathfrak{b}_{k+1}).^2)$$

Unter den angegebenen Voraussetzungen gilt dann das folgende Lemma.

Lemma 1. *Für jedes* $k \geqq 0$: $aga^n AblGen(H_k) \to H$.[3])

Beweis. Wir schließen wie üblich induktiv über k. Der Anfangsschritt ($k = 0$) unterscheidet sich nicht vom Bekannten.[4]) Beim Induktionsschritt benutzen wir die folgenden Hilfssätze:

(1) $aga^n Abl\, Part\,(\forall \mathfrak{b}_{k+1} H'(\mathfrak{a}_{k+1}, \mathfrak{b}_{k+1})) \to H$.[3])

(2) *Kommt* a_j *nicht in* H_1 *vor, so*
$aga^n Abl \forall a_j (H_1 \vee H_2(a_j)) \to H_1 \vee \forall a_j H_2(a_j)$.

(3) $aga^n Abl\, H_1 \vee H_2(a_j) \to H_1 \vee \exists a_j H_2(a_j)$.

Beweise. (1) ergibt sich analog dem Anfangsschritt unseres Lemmas. (2) erhält man sofort mit Hilfe der Verschiebungssätze für die Quantifikatoren (2.11) und (3) mit Hilfe von 2.4 a), d), g). — Mit diesen Hilfsmitteln kann man die Induktionsbehauptung unmittelbar beweisen. Nach Induktionsvoraussetzung gilt: $aga^n AblGen(H_k) \to H$. Daraus erhält man mit (1) auf Grund von 2.4i) (vordere Kopplung für $\vee$), daß

$$aga^n Abl\, Gen(H_k) \vee Part\,(\forall \mathfrak{b}_{k+1} H'(\mathfrak{a}_{k+1}, \mathfrak{b}_{k+1})) \to H.$$

Hiernach genügt es nach Kettenschluß zu zeigen, daß

$$aga^n Abl\, Gen(H_{k+1}) \to Gen(H_k) \vee Part\,(\forall \mathfrak{b}_{k+1} H'(\mathfrak{a}_{k+1}, \mathfrak{b}_{k+1})).$$

---

[1]) GÖDEL [5].

[2]) Durch „$H'(\mathfrak{a}_k, \mathfrak{b}_k)$“ deuten wir (für beliebiges $k \geqq 0$) denjenigen Ausdruck an, der aus $H'(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ dadurch entsteht, daß man für die in $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ vorkommenden Individuenvariablen in derselben Reihenfolge die in $\mathfrak{a}_k$, $\mathfrak{b}_k$ vorkommenden einsetzt.

[3]) Ist H ein beliebiger Ausdruck, dann soll „$Gen(H)$“ bzw. „$Part(H)$“ die Generalisierte bzw. die Partikularisierte von H andeuten. — Man vgl. dazu SCHRÖTER [22], I, Seite 63—64.

[4]) HILBERT-ACKERMANN [8], Seite 81—84.

Zunächst gilt:

$$aga^n Abl\ Gen(H_{k+1}) \to H_k \vee H'(\mathfrak{a}_{k+1}, \mathfrak{b}_{k+1}),$$

also auf Grund der Hilfssätze 2 und 3, da nach Konstruktion der Folgen $(\mathfrak{a}_k)_{k\geqq 0}$, $(\mathfrak{b}_k)_{k\geqq 0}$ und des Ausdruckes H_k die Individuenvariablen des s-Tupels $\mathfrak{b}_{k+1}$ in H_k nicht vorkommen, daß

$$aga^n Abl\ Gen(H_{k+1}) \to H_k \vee Part\left(\forall \mathfrak{b}_{k+1} H'(\mathfrak{a}_{k+1}, \mathfrak{b}_{k+1})\right)$$

und hieraus folgt mit *Gh* und Hilfssatz 2 sofort unsere Behauptung.

Wir formulieren nun in einem weiteren Lemma den sogenannten Endlichkeitssatz für aussagenlogische F-Modelle.

Lemma 2. *Besitzt jede endliche Teilmenge X^* einer Menge X von Ausdrücken ein n-wertiges aussagenlogisches F-Modell, so besitzt auch X ein solches.*

Der Beweis dieses Satzes unterscheidet sich nur unwesentlich vom Beweis des Endlichkeitssatzes im zweiwertigen Aussagenkalkül und wird deshalb nicht ausgeführt.[1])

Um den Vollständigkeitsbeweis zu beenden, unterscheiden wir für die Menge $X = \{H_0, \ldots, H_k, \ldots\}$ die folgenden Fälle:

1. Es gibt ein $k \geqq 0$, so daß $aga^n H_k$.
2. Es gibt kein $k \geqq 0$, so daß $aga^n H_k$.

ad 1. Es ist trivial, daß dann $aga^n Abl\, H_k$. Mit 2.4 und *Gh* folgt, daß $aga^n Abl\ Gen\ (H_k)$, also gilt auf Grund von Lemma 1: $aga^n Abl H$.

ad 2. Nach Konstruktion von X und Definition von $\vee$ besitzt dann jede endliche Teilmenge X^* von X ein n-wertiges aussagenlogisches F-Modell, also nach Lemma 2 die Menge X selbst, etwa f. Wir geben nun einen Individuenbereich J und mit Hilfe von f eine Belegung f_1 der Individuenvariablen mit Elementen aus J sowie eine Belegung f_2 der Prädikatenvariablen mit n-wertigen Attributen über J an, so daß $Wert_J^n(\exists \mathfrak{a} \forall \mathfrak{b} H'(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}); f_1, f_2) \prec W$. Damit ist dann ein Widerspruch zur Voraussetzung: $ag^n \exists \mathfrak{a} \forall \mathfrak{b} H'(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ hergeleitet, also kann Fall 2 nicht eintreten. Wir definieren:

$J = \{a_0, a_1, \ldots, a_j, \ldots\}$ (J wird also als Menge aller[2]) Individuenvariablen gewählt),

$f_1(a_j) = a_j \qquad (j \geqq 0)$,

$f_2(A_k^i) =$ dasjenige n-wertige i-stellige Attribut α über J, so daß für jedes $a_{j_1}, \ldots, a_{j_i}$ gilt: $\alpha[a_{j_1}, \ldots, a_{j_i}] = f(A_k^i a_{j_1} \ldots a_{j_i})$.

Um zu beweisen, daß für die so konstruierte Belegung

$$Wert_J^n(\exists \mathfrak{a} \forall \mathfrak{b} H'(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}); f_1, f_2) \prec W$$

---

[1]) Schröter [22], II.

[2]) Da J abzählbar-unendlich ist, folgt aus 4.1 sofort ein neuer Beweis für den Satz von Löwenheim-Skolem (3.3).

ist, genügt es nach Interpretation von $\exists$ zu zeigen, daß für alle Belegungen f_1' (mit Elementen aus J), die sich höchstens an den Stellen $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$ von der Bedeutung f_1 unterscheiden, gilt: $Wert_J^n(\forall \mathfrak{b} H'(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}); f_1', f_2) \prec W$. Um jedoch diese Behauptung zu zeigen, genügt es nach Interpretation von $\forall$ zu beweisen, daß es zu jeder Belegung f_1', die sich höchstens an den Stellen $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$ von der Belegung f_1 unterscheidet, eine Belegung f_1'' derart gibt, daß sich f_1'' ihrerseits höchstens an den Stellen $a_{j_1}, \ldots, a_{j_s}$ von f_1' unterscheidet und $Wert_J^n(H'(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}); f_1'', f_2) \prec W$ ist (wobei selbstverständlich die Funktionswerte von f_1' und f_1'' wieder in J angenommen werden). — Gegeben sei also eine Belegung f_1' mit den geforderten Eigenschaften. Dieses f_1' ordnet nun dem r-Tupel $[a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}]$ ein gewisses r-Tupel wieder von Individuenvariablen zu. Da in der Folge $(\mathfrak{a}_k)_{k \geqq 0}$ alle r-Tupel von Individuenvariablen vorkommen, kommt auch das eben beschriebene darin vor, etwa mit dem Index k. Die Belegung f_1'' wird nun so definiert, daß sie den Variablen $a_{j_1}, \ldots, a_{j_s}$ gerade die Variablen des s-Tupels $\mathfrak{b}_k$ (in der entsprechenden Reihenfolge) zuordnet und an den anderen Stellen mit f_1' übereinstimmt. — Es gelten dann die folgenden Bedingungen:

(1) $Wert_J^n(H'(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}); f_1'', f_2) = Wert_J^n(H'(\mathfrak{a}_k, \mathfrak{b}_k); f_1, f_2)$,

(2) $Wert_J^n(H'(\mathfrak{a}_k, \mathfrak{b}_k); f_1, f_2) = Werta^n(H'(\mathfrak{a}_k, \mathfrak{b}_k); f)$,

(3) $Werta^n(H'(\mathfrak{a}_k, \mathfrak{b}_k); f) \leqq Werta^n(H_k; f)$,

(4) $Werta^n(H_k; f) \prec W$.

Beweise. (1) und (2) werden zunächst geeignet verallgemeinert. Dann schließt man induktiv über die Ausdrucksstufe von H'. Dies soll jedoch hier nicht näher ausgeführt werden. — (3) und (4) gelten auf Grund der Definitionen von $\vee$, H_k und f.

Aus den Bedingungen (1) bis (4) folgt nun sofort die Behauptung:

$$Wert_J^n(H'(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) f_1'', f_2) \prec W.$$

Wir axiomatisieren nun die Mengen ag_k^n ($k \geqq 1$, natürliche Zahl). Als Axiomensysteme ax_k^n wählen wir die Mengen $aga^n \cup X_k$, wobei X_k aus allen Ausdrücken der Form

$$\begin{aligned}(H_1(a_1) \to H_1(a_2)) \vee (H_2(a_1) .\to. H_2(a_2) \to H_2(a_3)) \vee \cdots \\ \vee (H_k(a_1) .:\to:. H_k(a_2) :\to: \cdots .\to. H_k(a_k) \to H_k(a_{k+1}))\end{aligned}$$

besteht. Einen beliebigen Ausdruck dieser Art deuten wir im folgenden durch „H^k“ an. — Analog 4.1 gilt der nachstehende Satz.

4.2. Axiomatisierungstheorem für die Menge der im k-zahligen n-wertig allgemeingültigen Ausdrücke.

Für jedes H: $ax_k^n Abl H$ genau dann, wenn $ag_k^n H$.

Beweis. I. Die Richtung von links nach rechts wird wie in 4.1 beweisen.

II. Ebenfalls wie in 4.1 reduzieren wir die Umkehrung mit 2.11 zunächst wieder auf Skolemsche (allgemeingültigkeitstheoretische) Normalformen $H = \exists \mathfrak{a} \forall \mathfrak{b} H'(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$.

Obwohl wir im allgemeinen keine der zweiwertigen Konjunktion entsprechende Wahrheitsfunktion zur Verfügung haben, könnten wir jetzt prinzipiell das ursprüngliche WAJSBERGsche Axiomatisierungsverfahren[1]) auf unseren Ansatz übertragen. Wir kommen jedoch einfacher und übersichtlicher zum Ziel, wenn wir — wie im Beweis von 4.1 — auch hier die Methode der symbolischen Auflösung anwenden. Dadurch ergibt sich der Vorteil, das WAJSBERGsche Verfahren nur für quantifikatorenfreie Ausdrücke nachbilden zu müssen. Wir lösen also den gegebenen Ausdruck $H = \exists \mathfrak{a} \forall \mathfrak{b} H'(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ in der beschriebenen Weise symbolisch auf. Es gilt dann wieder Lemma 1. Anstatt Lemma 2 benutzen wir in diesem Beweis den sogenannten Endlichkeitssatz für n-wertige F-Modelle in einem endlichen Individuenbereich.

Lemma 3. *Gibt es zu jeder endlichen Teilmenge X^* von X einen k-zahligen Bereich J^*, so daß X^* in J^* ein F-Modell $[f_1^*, f_2^*]$ besitzt, so gibt es einen k-zahligen Individuenbereich J, in dem die ganze Menge X ein F-Modell $[f_1, f_2]$ besitzt.*

Beweis. Zunächst ist auf Grund von 3.4 klar, daß es genügt zu beweisen: Ist J k-zahlig und besitzt jede endliche Teilmenge X^* von X ein F-Modell in J, so besitzt auch X ein solches in J. Außerdem stellen wir fest, daß es über einem k-zahligen Individuenbereich für festes i ($i \geqq 1$) stets nur endlich viele n-wertige Attribute der Stellenzahl i gibt. Damit sind für die Belegung einer Individuen- bzw. Prädikatenvariablen stets nur endlich viele Möglichkeiten vorhanden, und somit können wir den Beweis für den entsprechenden Satz aus dem zweiwertigen Prädikatenkalkül ohne weiteres auf unseren allgemeinen Fall übertragen.[2])

Bei der symbolischen Auflösung von $\exists \mathfrak{a} \forall \mathfrak{b} H'(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ ergibt sich wieder eine unendliche Menge von quantifikatorenfreien Ausdrücken, etwa

$$X = \{H_0, H_1, \ldots, H_l, \ldots\}.$$

Analog zum Beweis von 4.1 unterscheiden wir die folgenden Fälle:

1. Es gibt ein $l \geqq 0$, so daß $ag_k^n H_l$.
2. Es gibt kein $l \geqq 0$, so daß $ag_k^n H_l$.

ad 1. Auf Grund von Lemma 1 genügt es zu beweisen, daß $ax_k^n Abl\ Gen(H_l)$. Dies gilt aber, wenn gezeigt werden kann: $ax_k^n Abl H_l$. Für dieses spezielle H_l wird nun der WAJSBERGsche Beweis nachgebildet. — Es seien $a_{i_1}, \ldots, a_{i_t}$ die in H_l vorkommenden Individuenvariablen (offenbar ist stets $t \geqq 1$). Da H_l quantifikatorenfrei ist, kommen alle a_{i_τ} ($1 \leqq \tau \leqq t$) vollfrei in H_l vor, d. h. H_l ist von der Form $H_l = H^*(a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$. Nun ist nach Voraussetzung $ag_k^n H^*(a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$. Daraus schließt man wie im zweiwertigen Prädikatenkalkül:

(1) Alle Ausdrücke der Form $H^*(a_{j_1}, \ldots, a_{j_t})$ $(1 \leqq j_\tau \leqq k,\ 1 \leqq \tau \leqq t)$ sind n-wertig aussagenlogisch allgemeingültig, also trivial aus ax_k^n ableitbar.

Wie man leicht nachprüft, gilt allgemein:

---

[1]) WAJSBERG [30], § 2.
[2]) Vgl. SCHRÖTER [22], II.

(2) Alle Ausdrücke der folgenden Formen sind n-wertig aussagenlogisch allgemeingültig, also aus ax_k^n ableitbar:

a) $H_1 .\to. H_2 \vee (H_1 \to H_3) \to H_2 \vee H_3$,

b) $H_1 \vee (H_2 \vee H_2) \to H_1 \vee H_2$,

c) $H_1 \vee H_2 \to H_2 \vee H_1$,

d) $(H_1 \vee H_2) \vee H_3 \to H_1 \vee (H_2 \vee H_3)$.

Wir betrachten nun diejenigen Elemente H^k aus X_k, für die gilt:

$$H_k(a_\varkappa) = H^*(a_\varkappa, a_{j_2}, \ldots, a_{j_t})$$

$(1 \leqq \varkappa \leqq k+1,\ 1 \leqq j_\tau \leqq k,\ 2 \leqq \tau \leqq t)$. Dann sind nach geeigneter Umbenennung gewisser Individuenvariablen alle Ausdrücke der folgenden Form aus ax_k^n ableitbar:

$$\begin{aligned}&\big(H_1(a_1) \to H_1(a_2)\big) \vee \cdots \\ &\qquad \vee \big(H_{k-1}(a_1) .:\to:. H_{k-1}(a_2) :\to: \cdots .\to. H_{k-1}(a_{k-1}) \to H_{k-1}(a_k)\big) \\ &\qquad \vee \big(H^*(a_1, a_{j_2}, \ldots, a_{j_t}) .:\to:. H^*(a_2, a_{j_2}, \ldots, a_{j_t}) :\to: \cdots \\ &\qquad\qquad .\to. H^*(a_k, a_{j_2}, \ldots, a_{j_t}) \to H^*(a_{i_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_t})\big).\end{aligned}$$

Mit unserer vereinbarten Abkürzung können wir diese Ausdrücke folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned}&H^{k-1} \vee \big(H^*(a_1, a_{j_2}, \ldots, a_{j_t}) .:\to:. H^*(a_2, a_{j_2}, \ldots, a_{j_t}) :\to: \cdots \\ &\qquad\qquad .\to. H^*(a_k, a_{j_2}, \ldots, a_{j_t}) \to H^*(a_{i_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_t})\big).\end{aligned}$$

(Für $k = 1$ fehlt der Ausdruck H^{k-1} selbstverständlich.) Auf Grund von (1) und (2) dürfen aber in den eben beschriebenen Ausdrücken alle Prämissen der Form $H^*(a_\varkappa, a_{j_2}, \ldots, a_{j_t})$ $(1 \leqq \varkappa \leqq k)$ weggelassen werden, also erhalten wir:

(3) Alle Ausdrücke der Form $H^{k-1} \vee H^*(a_{i_1}, a_{j_2} \ldots, a_{j_t})$ $(H^{k-1} \in X_{k-1}$, $1 \leqq j_\tau \leqq k,\ 2 \leqq \tau \leqq t)$ sind aus ax_k^n ableitbar.

Wir betrachten jetzt die Ausdrücke H^k aus X_k, für die gilt:

$$H_k(a_\varkappa) = H^{k-1} \vee H^*(a_{i_1}, a_\varkappa, a_{j_3}, \ldots, a_{j_t})$$

$(1 \leqq \varkappa \leqq k+1,\ 1 \leqq j_\tau \leqq k,\ 3 \leqq \tau \leqq t)$. — Durch Wiederholung des eben beschriebenen Verfahrens kommt man, wobei jetzt (3) anstatt (1) angewendet wird, zu Ausdrücken der Form

$$H^{k-1} \vee \big(H^{k-1} \vee H^*(a_{i_1}, a_{i_2}, a_{j_3}, \ldots, a_{j_t})\big)$$

und hieraus ergibt sich sofort mit (2), daß alle Ausdrücke der Form

$$H^{k-1} \vee H^*(a_{i_1}, a_{i_2}, a_{j_3}, \ldots, a_{j_t})$$

$(H^{k-1} \in X_{k-1},\ 1 \leqq j_\tau \leqq k,\ 3 \leqq \tau \leqq t)$ aus ax_k^n ableitbar sind. — Nach t Schritten erhält man schließlich:

(4) Alle Ausdrücke der Form $H^{k-1} \vee H^*(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_t})$ $(H^{k-1} \in X_{k-1})$ sind aus ax_k^n ableitbar.

Von den in (4) beschriebenen Ausdrücken betrachten wir nun diejenigen, für die gilt:

$$H_{k-1}(a_\varkappa) = H^*(a_\varkappa, a_{j_2}, \ldots, a_{j_t})$$

$(1 \leqq \varkappa \leqq k,\ 1 \leqq j_\tau \leqq k-1,\ 2 \leqq \tau \leqq t)$. — Nachdem wir in diesen Ausdrücken durch eine geeignete Umbenennung die Variable a_k in a_{i_1} übergeführt haben, erhalten wir auf Grund von (1) und (2):

(5) Alle Ausdrücke der Form

$$H^{k-2} \vee H^*(a_{i_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_t}) \vee H^*(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_t})$$

$(H^{k-2} \in X_{k-2},\ 1 \leqq j_\tau \leqq k-1,\ 2 \leqq \tau \leqq t)$ sind aus ax_k^n ableitbar.

Jetzt betrachten wir von den in (4) beschriebenen Ausdrücken diejenigen, für die gilt:

$$H_{k-1}(a_\varkappa) = H^{k-2} \vee H^*(a_{i_1}, a_\varkappa, a_{j_3}, \ldots, a_{j_t}) \vee H^*(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_t})$$

$(1 \leqq \varkappa \leqq k,\ 1 \leqq j_\tau \leqq k-1,\ 3 \leqq \tau \leqq t)$. — Unter Verwendung von (2) und (5) können wir in (5) die Individuenvariable a_{j_2} in a_{i_2} umwandeln (und zwar wie beim Übergang von (3) zu (4)). Durch Wiederholung dieses Verfahrens kommen wir nach t Schritten schließlich zu Ausdrücken der Form

$$H^{k-2} \vee H^*(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_t}) \vee H^*(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_t})$$

und hieraus folgt wie oben mittels (2):

(6) Alle Ausdrücke der Form $H^{k-2} \vee H^*(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_t})$ $(H^{k-2} \in X_{k-2})$ sind aus ax_k^n ableitbar. Damit ist der Index von H_{k-1} in (4) um eins erniedrigt. Wendet man das ganze Verfahren noch $(k-2)$-mal an, so erhält man schließlich:

(7) $ax_k^n Abl H^*(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_t})$.

Das war aber zu zeigen.

ad 2. Nach Konstruktion von X und Definition von $\vee$ gibt es dann zu jeder endlichen Teilmenge X^* von X einen k-zahligen Individuenbereich J^*, in dem X^* ein n-wertiges F-Modell $[f_1^*, f_2^*]$ besitzt. Also gibt es nach Lemma 3 einen k-zahligen Individuenbereich J, in dem die ganze Menge X ein n-wertiges F-Modell besitzt, etwa $[f_1, f_2]$. Es folgt nun sofort auf Grund der Interpretation von $\exists$ und $\forall$ sowie nach Konstruktion der Menge X, daß $Wert_J^n(\exists \mathfrak{a} \forall \mathfrak{b} H'(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}); f_1, f_2) \prec W$. Damit ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $ag_J^n \exists \mathfrak{a} \forall \mathfrak{b} H'(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ hergeleitet, also kann Fall 2 nicht eintreten.

§ 5. Theorie des Bolzanoschen Folgerns

Wir wollen in diesem Paragraphen das aus dem klassischen zweiwertigen Prädikatenkalkül bekannte *semantische Folgern* (*im* Bolzano*schen Sinne*) und alle damit verbundenen Untersuchungen auf unsere n-wertigen Fälle übertragen. Grundlegend dabei ist wie im Zweiwertigen der (prädikatenlogische) Modellbegriff. Wir sagen in sinngemäßer Verallgemeinerung der zweiwertigen Begriffsbildungen:

(1) *Aus X folgt H n-wertig in J ($XFol^n_J H$) genau dann, wenn für jedes f_1, f_2 gilt: Wenn $[f_1, f_2]$ ein n-wertiges Modell von X in J ist, dann ist $[f_1, f_2]$ auch ein n-wertiges Modell der Einermenge $\{H\}$ in J.*

(2) *Aus X folgt H n-wertig im $\mathfrak{m}$-zahligen ($XFol^n_{\mathfrak{m}} H$) genau dann, wenn H in jedem Individuenbereich J mit der Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ aus X n-wertig folgt* ($\mathfrak{m} \geqq 1$).

(3) *Aus X folgt H n-wertig ($XFol^n H$) genau dann, wenn H in jedem (nicht-leeren) Individuenbereich J aus X n-wertig folgt.*

(4) *Aus X folgt H n-wertig im Endlichen ($XFol^n_{end} H$) genau dann, wenn H in jedem (nicht-leeren) endlichen Individuenbereich J aus X n-wertig folgt.*

Die Menge der Ausdrücke H, die jeweils im Sinne einer der eingeführten Folgerungsrelationen Fol^n_J, $Fol^n_{\mathfrak{m}}$, Fol^n bzw. Fol^n_{end} aus X folgen, deuten wir durch „$Fl^n_J(X)$“, „$Fl^n_{\mathfrak{m}}(X)$“, „$Fl^n(X)$“ bzw. „$Fl^n_{end}(X)$“ an. Die entsprechenden Mengenfunktionen werden durch „Fl^n_J“, „$Fl^n_{\mathfrak{m}}$“, „Fl^n“ bzw. „Fl^n_{end}“ bezeichnet.

Für die Aufgabenstellung in diesem Paragraphen ist grundlegend, daß wir die Beziehung $XFol^n_J H$ als eine auf die Menge X relativierte Allgemeingültigkeit des Ausdruckes H im Individuenbereich J auffassen, und zwar in dem Sinne, daß H nicht für alle Belegungen, sondern nur für die Modelle von X in J den Wahrheitswert W annehmen muß. Diese Auffassung wird insbesondere durch den Satz: $Fl^n_J(\Lambda) = ag^n_J$[1]) nahegelegt. (Entsprechend für die anderen Folgerungsrelationen.) Wir werden somit versuchen, alle Resultate über die („nicht-relativierte“) Allgemeingültigkeit, also die Reduktions- und Repräsentantentheoreme sowie die Axiomatisierungstheoreme, sinnvoll auf das Bolzanosche Folgern zu übertragen.

Bevor wir diese Untersuchungen beginnen, formulieren wir einen Hilfssatz, der aus beweistechnischen Gründen sehr nützlich ist. Es seien ein beliebiger Ausdruck H und eine beliebige Menge X von Ausdrücken gegeben. Die Menge aller Ausdrücke der Form $H' \underset{i}{\rightarrow} H$, wobei $H' \in X$, bezeichnen wir im folgenden durch „$X \underset{i}{\rightarrow} H$“. Es gilt dann für alle eingeführten Folgerungsrelationen das nachstehende Lemma, das wir der Kürze wegen nur für Fol^n_J formulieren wollen.

Lemma. *Aus X folgt H n-wertig in J genau dann, wenn es kein f_1, f_2 gibt, so daß $[f_1, f_2]$ ein n-wertiges F-Modell der Menge $X \underset{n}{\rightarrow} H$ in J ist.*

Beweis. Man macht die eingeführte Definition rückgängig und beachtet den Wertverlauf der Funktion C^n.

Wir kommen nun zu dem Teil unserer Betrachtungen, der dem Paragraphen 3 entspricht. Das bedeutet hier, einen vollständigen Überblick über alle betrachteten Folgerungsrelationen zu gewinnen. Wir geben dazu eine Reihe von Reduktionstheoremen für die Folgerungsbeziehungen an, die unmittelbare Verallgemeinerungen der Reduktionstheoreme für die verschiedenen Arten von Allgemeingültigkeit im Paragraphen 3 darstellen.

---

[1]) Durch „Λ“ deuten wir im folgenden die leere Menge an.

5.1. *Wenn* $Kz(J) = \mathfrak{m}$, *so* $Fl_J^n(X) = Fl_{\mathfrak{m}}^n(X)$ $(\mathfrak{m} \geqq 1)$.

5.2. *a) Wenn* $\mathfrak{m}_1 \leqq \mathfrak{m}_2$, *so* $Fl_{\mathfrak{m}_1}^n(X) \supseteq Fl_{\mathfrak{m}_2}^n(X)$ $(\mathfrak{m}_1 \geqq 1)$.

b) *Wenn* $k < \aleph_0 \leqq \mathfrak{m}$, *so* $Fl_k^n(X) \supseteq Fl_{end}^n(X) \supseteq Fl_{\mathfrak{m}}^n(X) \supseteq Fl^n(X)$ $(k \geqq 1)$.

5.3. Satz von Löwenheim-Skolem für das Folgern.

Wenn $\aleph_0 \leqq \mathfrak{m}$, *so* $Fl_{\aleph_0}^n(X) = Fl_{\mathfrak{m}}^n(X)$.

Beweise. Unmittelbar klar, wenn man das eben formulierte Lemma anwendet und dann die Sätze 3.4 bis 3.6 benutzt.

Auf Grund der vorstehenden Reduktionstheoreme erhalten wir den folgenden Satz, durch den alle betrachteten Folgerungsrelationen klassifiziert werden.

5.4 a) *Jede der Mengenfunktionen* Fl_J^n, $Fl_{\mathfrak{m}}^n$, Fl_{end}^n *und* Fl^n *ist wertverlaufsgleich einer der folgenden*:

$$Fl_1^n,\ Fl_2^n,\ \ldots,\ Fl_k^n,\ \ldots,\ Fl_{end}^n,\ Fl^n \qquad (k \geqq 1, \text{ natürliche Zahl}).$$

b) *Für jede Menge* X *gilt*:

$$Fl_1^n(X) \supseteq Fl_2^n(X) \supseteq \cdots \supseteq Fl_k^n(X) \supseteq \cdots Fl_{end}^n(X) \supseteq Fl_{\aleph_0}^n(X) = Fl^n(X).$$

Setzt man $X = \Lambda$, so sind in diesem Satz wegen der Beziehungen $Fl_{\mathfrak{m}}^n(\Lambda) = ag_{\mathfrak{m}}^n$, $Fl_{end}^n(\Lambda) = ag_{end}^n$ und wegen des Repräsentantentheorems 3.8 alle Inklusionen echt. Für beliebige Mengen X kann man das nicht mehr erwarten. Gibt es z. B. eine Menge X, die in keinem $(k+1)$-zahligen Individuenbereich J ein n-wertiges Modell $[f_1, f_2]$ besitzt, so ist $Fl_{k+1}^n(X)$ gleich der Menge aller Ausdrücke, also kann die echte Inklusion $Fl_k^n(X) \supset Fl_{k+1}^n(X)$ nicht gelten. Besitzt aber X im $(k+1)$-zahligen ein n-wertiges Modell, so ist die Forderung, daß k einstellige Prädikatenvariablen $A_{j_1}^1, A_{j_2}^1, \ldots, A_{j_k}^1$ in X nicht vorkommen, eine sehr einfache strukturelle hinreichende Bedingung dafür, daß die obige Inklusion echt ist. Um das einzusehen, wählen wir den im Beweis des Repräsentantentheorems 3.8 konstruierten Ausdruck H_k, bilden $Gen(H_k)$ und benennen in diesem Ausdruck die nach Konstruktion vorkommenden Prädikatenvariablen $A_1^1, A_2^1, \ldots, A_k^1$ simultan in $A_{j_1}^1, \ldots, A_{j_k}^1$ um. Der auf diese Weise erhaltene Ausdruck folgt offenbar aus jeder Menge X n-wertig im k-zahligen, da er im k-zahligen n-wertig allgemeingültig ist. Ändert man andererseits das nach Voraussetzung existierende Modell $[f_1, f_2]$ an den Stellen $A_{j_1}^1, \ldots, A_{j_k}^1$ geeignet ab, so erhält man eine Belegung f_2', so daß $[f_1, f_2']$ wiederum Modell von X ist (weil $A_{j_1}^1, \ldots, A_{j_k}^1$ in X nicht vorkommen), während aber der konstruierte Ausdruck für f_1, f_2' einen nicht-ausgezeichneten Wahrheitswert annimmt. — Die Diskussion des Falles $Fl_{end}^n(X) \supseteq Fl^n(X)$ verläuft ähnlich. Es genügt hier zu fordern, daß mindestens eine zweistellige Prädikatenvariable nicht in X vorkommt. — Die Aufgabe, notwendige und hinreichende Bedingungen dafür anzugeben, wann Gleichheit bzw. eine echte Inklusion vorliegt, scheint bei beliebigem X nicht übersichtlich lösbar zu sein; wir brechen deshalb die Betrachtungen dazu ab.

Wir übertragen nun die Resultate des Paragraphen 4. Dem Problem der Axiomatisierung gewisser Mengen entspricht jetzt die Aufgabe, die betrachteten Folgerungsrelationen *syntaktisch zu charakterisieren*, d. h. zu jeder Folgerungsrelation eine Ableitbarkeitsrelation anzugeben, so daß für beliebiges X und H gilt: Aus X folgt (im Sinne der vorgegebenen Folgerungsrelation) der Ausdruck H genau dann, wenn H aus X im Sinne der dazu konstruierten Ableitbarkeitsrelation ableitbar ist.[1]) Auf Grund der Reduktionstheoreme für die Folgerungsrelationen (insbesondere auf Grund von Satz 5.4) können wir uns dabei auf die Relationen Fol_1^n, Fol_2^n, ..., Fol_k^n, ..., Fol_{end}^n und Fol^n beschränken. Die Relationen Fol_{end}^n können nicht syntaktisch charakterisiert werden; wir berücksichtigen sie deshalb bei den nachfolgenden Betrachtungen zunächst nicht.

Wie im zweiwertigen Fall spielen bei der syntaktischen Charakterisierung gewisse funktionale Eigenschaften der Folgerungsrelationen (und der ihnen zugeordneten Mengenfunktionen) auch hier eine wesentliche Rolle. Sie werden in den folgenden Sätzen systematisch zusammengestellt. Es gilt für $\mathfrak{m} \geqq 1$:

5.5 Folgerungsmenge der leeren Menge.

$Fl_{\mathfrak{m}}^n(\Lambda) = ag_{\mathfrak{m}}^n$.

5.6. Hülleneigenschaften.

a) $X \subseteqq Fl_{\mathfrak{m}}^n(X)$.

b) *Wenn* $X_1 \subseteqq X_2$, *so* $Fl_{\mathfrak{m}}^n(X_1) \subseteqq Fl_{\mathfrak{m}}^n(X_2)$.

c) $Fl_{\mathfrak{m}}^n\left(Fl_{\mathfrak{m}}^n(X)\right) = Fl_{\mathfrak{m}}^n(X)$.

5.7. Endlichkeitssatz.

Wenn $XFol_{\mathfrak{m}}^n H$, *so gibt es eine endliche Teilmenge* X^* *von* X, *so daß* $X^* Fol_{\mathfrak{m}}^n H$.

5.8. Ableitbarkeits- und Deduktionstheorem.

a) *Wenn* $XFol_{\mathfrak{m}}^n H_1 \xrightarrow[n-1]{} H_2$, *so* $X \cup \{H_1\} Fol_{\mathfrak{m}}^n H_2$.

b) *Wenn* $X \cup \{H_1\} Fol_{\mathfrak{m}}^n H_2$, *so* $XFol_{\mathfrak{m}}^n H_1 \xrightarrow[n-1]{} H_2$.

Beweise. Für 5.5 und 5.6 sind die Beweise unmittelbar durch Rückgang auf die Definitionen zu führen und unterscheiden sich nicht von den entsprechenden im Zweiwertigen. — Der Endlichkeitssatz (5.7) bietet im Mehrwertigen die aus dem Zweiwertigen bekannten Schwierigkeiten noch stärker. Man bringt ihn zunächst mit dem zu Anfang dieses Paragraphen formulierten Lemma auf die Form: Wenn es zu jeder endlichen Teilmenge Y^* einer Menge Y von Ausdrücken einen $\mathfrak{m}$-zahligen Individuenbereich J^* und ein f_1^*, f_2^* gibt, so daß $[f_1^*, f_2^*]$ ein n-wertiges F-Modell von Y^* in J^* ist, so gibt es einen $\mathfrak{m}$-zahligen Individuenbereich J und ein f_1, f_2 derart, daß $[f_1, f_2]$ ein n-wertiges F-Modell der ganzen Menge Y in J ist. — Den Fall, daß $\mathfrak{m}$ endlich ist, haben wir schon im Paragraphen 4 bei der Axiomatisierung der im k-zahligen allgemeingültigen Ausdrücke diskutiert. Wir setzen deshalb voraus, daß $\mathfrak{m}$ unendlich ist. Auf Grund der Reduktionstheoreme 5.1 bis 5.3 genügt es dann, den folgenden Satz zu beweisen: Wenn es zu jeder endlichen Teil-

[1]) Vgl. dazu Schröter [22], III.

menge Y^* von Y ein J^*, f_1^*, f_2^* gibt, so daß $[f_1^*, f_2^*]$ ein n-wertiges F-Modell von Y^* in J^* ist, so gibt es ein J, f_1, f_2, so daß $[f_1, f_2]$ ein n-wertiges F-Modell für Y in J ist. Mit 2.12 reduzieren wir diesen Satz zunächst auf Mengen Y von Ausdrücken, die sich sämtlich in der SKOLEMschen (allgemeingültigkeitstheoretischen) Normalform befinden. Außerdem dürfen wir generell voraussetzen, daß Y unendlich ist. Es sei also

$$Y = \{\exists \mathfrak{a}_0 \forall \mathfrak{b}_0 H_0, \exists \mathfrak{a}_1 \forall \mathfrak{b}_1 H_1, \ldots, \exists \mathfrak{b}_k \forall \mathfrak{b}_k H_k, \ldots\}$$

eine derartige Menge, wobei die $\mathfrak{a}_k$ und $\mathfrak{b}_k$ r_k- bzw. s_k-Tupel von paarweise verschiedenen Individuenvariablen sind. Alle weiteren Beweisschritte verlaufen nun derart, daß wir den Beweis des Endlichkeitssatzes im zweiwertigen Fall[1]) in der im Paragraphen 4, Lemma 1 und 2, angegebenen Weise modifizieren. Dies bietet jedoch keine prinzipiellen Schwierigkeiten, so daß wir auf weitere Einzelheiten verzichten können. — Der Satz 5.8 weicht für $n > 2$ von der Formulierung im Zweiwertigen ab; er wird aber sofort als richtig erkannt, wenn man die Tabelle für die Wahrheitsfunktion C^n beachtet.

Um diese Ergebnisse zu vervollständigen, schließen wir noch einige Bemerkungen über das Folgern im Endlichen (Fol_{end}^n) an. Die Sätze 5.5, 5.6 und 5.8 gelten ebenfalls. Der Endlichkeitssatz ist jedoch im allgemeinen nicht mehr richtig. Um dies zu zeigen, müssen wir eine Menge X und ein H angeben, so daß (1) $X\,Fol_{ind}^n H$ und (2) es zu jeder endlichen Teilmenge X^* von X in einem gewissen endlichen Individuenbereich ein n-wertiges F-Modell von $X^* \underset{n}{\rightarrow} H$ gibt. Wir wählen dazu $H = A_0^2 a_0 a_0$ und als X die Menge aller Ausdrücke der Form $H_k' \rightarrow H$ ($k = 1, 2, \ldots$), wobei die H_k' aus den im Beweis von 3.8 konstruierten Ausdrücken H_k durch eine Umbenennung der Prädikatenvariablen derart entstehen, daß alle in den Ausdrücken der Menge X überhaupt auftretenden Prädikatenvariablen paarweise verschieden sind. Aus den Eigenschaften der H_k (vgl. Beweis von 3.8) folgt sofort, daß X und H das Gewünschte leisten.

Durch die Sätze 5.5 bis 5.8 ist eine Mengenfunktion, die jeder Teilmenge der Menge aller Ausdrücke wieder eine solche Teilmenge zuordnet, eindeutig festgelegt.[2]) Zur syntaktischen Charakterisierung einer unserer Folgerungsrelationen genügt es somit, für eine gewählte Ableitbarkeitsrelation dieselben Sätze nachzuweisen. Wir wählen dazu die von SCHRÖTER eingeführte beschränkte Ableitbarkeit.[3]) Die grundlegende Redeweise ist: *Aus X ist H unter Zugrundelegung der Prämissenmenge Y beschränkt ableitbar* ($X\,Babl_Y H$). Der Anfangsschritt lautet: Wenn $H \in X \cup Y$, so $X\,Babl_Y H$. Die hier verwendeten Schlußregeln stimmen mit den Regeln, die der gewöhnlichen Ableitbarkeit zugrunde liegen (§ 1), bis auf die Bedingung überein, daß die Anwendung von *Gh*, *Pv* und *Umsvfr* auf Mengen $X' \subseteq X$, in deren Elementen die in Frage kommenden Individuenvariablen nicht vorkommen, beschränkt ist. Zur Erläuterung geben wir für die unbeschränkten wie für die beschränkten Regeln je ein Beispiel an.

[1]) Vgl. SCHRÖTER [22], II.
[2]) SCHRÖTER [22], III.
[3]) SCHRÖTER [22], I, Seite 74—79.

a) Abtrennungsregel.
Wenn $X\,Babl_Y H_2$ und $X\,Babl_Y H_1 \to H_2$, so $Babl_Y H_2$.

b) Regel der beschränkten hinteren Generalisierung.
Wenn $X'\,Babl_Y H_1 \to H_2(a_j)$, $X' \subseteq X$ und a_j in keinem Element der Menge $X' \cup \{H_1\}$ vorkommt, so $X\,Babl_Y H_1 \to \forall a_j H_2(a_j)$.

Die Menge der Ausdrücke H, für die $X\,Babl_Y H$ gilt, nennen wir die *beschränkte Ableitungsmenge von* X (*bezüglich der Prämissenmenge* Y) und deuten sie durch „$Bab_Y(X)$" an.

Für unsere Zwecke kommen nur die Prämissenmengen $Y = aga^n \cup ax_k$ und $Y = aga^n$ in Frage. Für $X\,Babl_Y H$ bzw. $Bab_Y(X)$ schreiben wir in Analogie zu den Folgerungsbeziehungen im ersten Fall $X\,Babl^n_k H$ bzw. $Bab^n_k(X)$ und im zweiten Fall $X\,Babl^n_{\aleph_0} H$ bzw. $Bab^n_{\aleph_0}(X)$. Damit haben wir eine durchgängige Bezeichnungsweise, um die den Sätzen 5.5 bis 5.8 entsprechenden funktionalen Eigenschaften der Ableitbarkeitsrelationen zu formulieren. Es gilt für $1 \leqq \mathfrak{m} \leqq \aleph_0$:

5.9. Beschränkte Ableitungsmenge der leeren Menge.
$Bab^n_{\mathfrak{m}}(\Lambda) = ag^n_{\mathfrak{m}}$.

5.10. Hülleneigenschaften.
a) $X \subseteq Bab^n_{\mathfrak{m}}(X)$.
b) *Wenn* $X_1 \subseteq X_2$, *so* $Bab^n_{\mathfrak{m}}(X_1) \subseteq Bab^n_{\mathfrak{m}}(X_2)$.
c) $Bab^n_{\mathfrak{m}}\left(Bab^n_{\mathfrak{m}}(X)\right) = Bab^n_{\mathfrak{m}}(X)$.

5.11. Endlichkeitssatz.
Wenn $X\,Babl^n_{\mathfrak{m}} H$, *so gibt es eine endliche Teilmenge* X^* *von* X, *so daß* $X^*\,Babl^n_{\mathfrak{m}} H$.

5.12. Ableitbarkeits- und Deduktionstheorem.
a) *Wenn* $X\,Babl^n_{\mathfrak{m}} H_1 \xrightarrow[n-1]{} H_2$, *so* $X \cup \{H_1\}\,Babl^n_{\mathfrak{m}} H_2$.
b) *Wenn* $X \cup \{H_1\}\,Babl^n_{\mathfrak{m}} H_2$, *so* $X\,Babl^n_{\mathfrak{m}} H_1 \xrightarrow[n-1]{} H_2$.

Beweise. — 5.9. Zunächst beweist man für beliebige Mengen Y durch Induktion über die Ableitbarkeitsstufe den Hilfssatz: *Wenn* $\Lambda\,Babl_Y H$, *so* $Y\,Abl\,H$ (und umgekehrt). Also ist $Bab_Y(\Lambda) = Ab(Y)$. Dadurch folgt durch Anwendung der Axiomatisierungstheoreme 4.1 und 4.2 sofort die Behauptung. — 5.10 bis 5.12 a) werden wie üblich induktiv über die Ableitbarkeitsstufe bewiesen.[1]) 5.12 b) gilt im allgemeinen nicht für beliebige Prämissenmengen Y. In unserem Fall gilt es aber, wie man wiederum durch Induktion über die Ableitungsstufe zeigen kann, weil alle Ausdrücke der folgenden Form n-wertig aussagenlogisch allgemeingültig sind, in jedem Fall also in der Prämissenmenge liegen:

[1]) Mit Ausnahme von 5.10c) gelten diese Sätze sogar für beliebiges Y. 5.10c) gilt im allgemeinen nur dann für beliebige Y, wenn Y gegenüber freien Umbenennungen abgeschlossen ist. — Vgl. dazu Schröter [22], I und II.

(1) $H \underset{n-1}{\longrightarrow} H$,

(2) $H_1 \to (H_2 \underset{n-1}{\longrightarrow} H_1)$,

(3) $(H_1 \to (H_2 \to \cdots \to (H_r \to H) \ldots) \to (H_{j_1} \to (H_{j_2} \to \cdots \to (H_{j_r} \to H) \ldots)$,

wobei $j_1, j_2, \ldots, j_r$ eine beliebige Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, r$ ist,

(4) $(H_1 \to (H_2 \to \cdots \to (H_r \to H) \ldots)$

$:\to: H \to H' .\to. H_1 \to (H_2 \to \cdots \to (H_r \to H') \cdots)$,

(5) n-wertiger Fregescher Kettenschluß

$H_1 \underset{r-1}{\longrightarrow} (H_2 \to H_3) :\to: (H_1 \underset{n-1}{\longrightarrow} H_2) .\to. (H_1 \underset{n-1}{\longrightarrow} H_3)$,

(6) n-wertige Prämissenverschmelzung

$H_1 \to (H_1 \underset{n-1}{\longrightarrow} H_2) .\to. (H_1 \underset{n-1}{\longrightarrow} H_2)$.

Aus 5.5 bis 5.12 ergibt sich jetzt unmittelbar

5.13. Hauptsatz über die syntaktische Charakterisierung der Bolzanoschen Folgerungsrelationen.

Für jedes X und H: $X Babl^n_{\mathfrak{m}} H$ genau dann, wenn $X Fol^n_{\mathfrak{m}} H$ $\quad (1 \leqq \mathfrak{m} \leqq \aleph_0)$.

Die Relationen Fol^n_{end} können auf die angegebene Weise nicht syntaktisch charakterisiert werden, und zwar scheitert es zunächst daran, daß die Mengen ag^n_{end} nicht axiomatisierbar sind und folglich die Bedingung 5.9 nicht in dem Sinne gilt, daß bei der beschränkten Ableitbarkeit eine entscheidbare Prämissenmenge gewählt werden kann. (In diesem Zusammenhang setzen wir natürlich voraus, daß die Menge Ω entscheidbar ist. Man vgl. dazu Seite 114 dieser Arbeit.) Selbst wenn man als Prämissenmenge ag^n_{end} wählt, kann Satz 5.13 nicht gelten. Es ist dann zwar die Bedingung 5.9 trivial erfüllt; die Ursache ist jetzt der Endlichkeitssatz, der für das Folgern im Endlichen nicht für beliebige Mengen X gilt, während er für die beschränkte Ableitbarkeit für beliebiges X richtig ist. Man vgl. dazu das oben angegebene Beispiel.

Literatur

[1] G. Asser, Die endlichwertigen Łukasiewiczschen Aussagenkalküle. Bericht über die Mathematiker-Tagung in Berlin vom 14. bis 18. Januar 1953. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1953.

[2] ———, Eine semantische Charakterisierung der deduktiv abgeschlossenen Mengen des Prädikatenkalküls der ersten Stufe. Diese Zeitschrift **1** (1955), 3—28.

[3] ———, Theorie der logischen Auswahlfunktionen. Diese Zeitschrift **3** (1957), 30—67.

[4] G. Gentzen, Untersuchungen über das logische Schließen. I und II. Math. Zeitschrift **39** (1934), 176—210 und 405—431.

[5] K. Gödel, Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. Monatshefte für Mathematik und Physik **37** (1930), 349—360.

[6] L. Henkin, Fragments of the propositional calculus. The Journal of Symbolic Logic **14** (1949), 42—48.

[7] ———, The completeness of the first-order functional calculus. The Journal of Symbolic Logic **14** (1949), 159—166.

[8] D. Hilbert und W. Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik. 3. Aufl., Berlin 1949.

[9] D. Hilbert und P. Bernays, Grundlagen der Mathematik II. Berlin 1939.
[10] L. Löwenheim, Über Möglichkeiten im Relativkalkül. Math. Annalen **76** (1915), 447—470.
[11] J. Łukasiewicz und A. Tarski, Untersuchungen über den Aussagenkalkül. Comptes rendus des seances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Cl. III, **23** (1930), 61—82.
[12] E. L. Post, Introduction to a general theory of elementary propositions. Amer. Journal of Math. **43** (1921), 163—185.
[13] H. Rasiowa, Algebraic models of axiomatic theories. Fundamenta Mathematicae **41** (1955), 291—310.
[14] A. Rose, A formalisation of Post's m-valued propositional calculus. Math. Zeitschrift **56** (1952), 94—104.
[15] ———, The degree of completeness of the m-valued Łukasiewicz propositional calculus. Journ. London Math. Soc. **27** (1952), 92—102.
[16] ———, Fragments of the m-valued propositional calculus. Math. Zeitschrift **59** (1953/54), 206—210.
[17] J. B. Rosser and A. R. Turquette, Axiom schemes for m-valued propositional calculi. The Journal of Symbolic Logic **10** (1945), 61—82.
[18] ———, Axiom schemes for m-valued functional calculi of first order.
Part. I. Definition of axiom schemes and proof of plausibility. The Journal of Symbolic Logic **13** (1948), 177—192.
Part II. Deductive completeness. The Journal of Symbolic Logic **16** (1951) 22—34.
[19] ———, A note on the deductive completeness of m-valued propositional calculi. The Journal of Symbolic Logic **14** (1949), 219—225.
[20] ———, Many-valued logics. Studies in logic and the foundations of mathematics. North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1953.
[21] K. Schröter, Theorie des mathematischen Schließens. Bericht über die Mathematiker-Tagung in Berlin vom 14. bis 18. Januar 1953. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1953.
[22] ———, Theorie des logischen Schließens.
Teil I. Diese Zeitschrift **1** (1955), 37—86. Teil II. Diese Zeitschrift **4** (1958), 10—65. Teil III erscheint in Kürze ebenda.
[23] ———, Methoden zur Axiomatisierung beliebiger Aussagen- und Prädikatenkalküle. Diese Zeitschrift **1** (1955), 241—251.
[24] ———, Theorie des bestimmten Artikels. Diese Zeitschrift **2** (1956), 37—56.
[25] ———, Die Unabhängigkeit der elementaren prädikatenlogischen Schlußregeln. Diese Zeitschrift **2** (1956), 218—227.
[26] ———, Die Vollständigkeit der die Implikation enthaltenden zweiwertigen Aussagenkalküle und Prädikatenkalküle der ersten Stufe. Diese Zeitschrift **3** (1957), 81—107.
[27] Th. Skolem, Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Thoreme über dichte Mengen. Skrifter uitgit av Videnskapsselskapet i Kristiania, I Mat. Nat. Klasse, 1919.
[28] H. Thiele, Eine Axiomatisierung der zweiwertigen Prädikatenkalküle der ersten Stufe, welche die Implikation enthalten. Diese Zeitschrift **2** (1956), 93—106.
[29] Б. А. Трахтенброт, Невозможность алгорифма для проблемы разрешимости на конечных классах. Доклады Академии Наук СССР **70** (1950), 569—572.
(B. A. Trachtenbrot, Die Unmöglichkeit eines Algorithmus für das Entscheidungsproblem in endlichen Klassen.)
[30] M. Wajsberg, Untersuchungen über den Funktionenkalkül für endliche Individuenbereiche. Math. Annalen **108** (1933), 218—228.

(Eingegangen am 15. Februar 1957)